

Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі
«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

М.Ж.Байсалова, М.Ш.Тілепиев

МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ
1- бөлім

Оқулық

Алматы
АЭЖБУ
2019

ӘОЖ 51(075.8)
КБЖ 22.1я73
Б 17

Пікір берушілер:

физика-математика ғылымдарының кандидаты,
әль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Дифференциалдық
теңдеулер және басқару теориясы» кафедрасының доценті

Ү.Қ.Қойлышов

физика-математика ғылымдарының кандидаты,
әль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Дифференциалдық
теңдеулер және басқару теориясы» кафедрасының доценті

Қ.С.Женсикбаев

физика-математика ғылымдарының кандидаты,
Алматы энергетика және байланыс университетінің «Математика және
математикалық үлгілеу» кафедрасының доценті

А.Қ.Искакова

Алматы энергетика және байланыс университетінің Ғылыми кеңесі
басуға ұсынады (15.03.2019 ж. №4 хаттама). АЭЖБУ ведомостік әдебиеттер
басылымдарын шығарудың тақырыптық жоспары бойынша басылады, реті
42.

Байсалова М.Ж., Тілепиев М.Ш.

Б 17 Математика. Теориясы және есептер жинағы. 1 бөлім: Оқулық. –
Алматы: АЭЖБУ, 2019. - 99 б.: кесте - 8, ил. - 13, әдеб. көреткіші – 9 атау.

ISBN 978-601-7889-89-0

Бұл оқулық Алматы энергетика және байланыс университетінде
техникалық мамандықтар бойынша оқитын білім алушылар үшін
«Математика» пәнінің бағдарламасына сәйкес жасалған.

ӘОЖ 51(075.8)
КБЖ 22.1я73

ISBN 978-601-7889-89-0

© АЭЖБУ, 2019
Байсалова М.Ж.,
Тілепиев М.Ш., 2019

Кіріспе

Ғылым мен техникада, инженерлік–техникалық зерттеулерде математика өте маңызды рөл атқарады. Ол тек сандық есептің қаруы ғана емес, сонымен қатар дәл зерттеулердің әдісі және ұғымдар мен мәселелерді анағұрлым нақты қалыптастырудың құралы да болып табылады. Сондай-ақ, математика қолданбалы есептерді шығару үшін пайдаланатын ғылыми құрал ғана емес, бұл пәнді оқып меңгеру болашақ мамандардың ой-өрісінің, жалпы білім мәдениетінің жоғары деңгейде қалыптасуына зор әсер етеді.

Жоғары оқу орындары қазіргі кезеңде кредиттік технология бойынша оқытуға көшкендіктен студенттер оқытушы тарапынан оқу-әдістемелік кешенмен толықтай қамтамасыз етілуі тиіс. Бірақ бұл үшін оқу процесін жүргізуге қажетті қазақ тілінде жарық көрген теориялық оқулықтар бар болғанымен, практикалық жұмыстарды орындауға арналған есептер жинағы жеткіліксіз. Сондықтан ұсынылып отырған «Математика. Теориясы және есептер жинағы. 1 бөлім» оқулығы техникалық мамандықтарда оқитын студенттер үшін «Математика 1» пәнінің типтік бағдарламасына сәйкес кредиттік жүйеге лайықты етіп жазылған. Бұл оқулықта дәріс материалдары, тәжірибелік сабақтарда және студенттердің өз-бетімен даярланғанда пайдаланатын қажетті, құнды материалдар қамтылған.

Оқулық үш тараудан тұрады.

Бірінші тарау сызықтық алгебра элементтері тақырыбына арналған. Онда екі және үш белгісізі бар сызықты теңдеулер жүйесі және екінші және үшінші ретті анықтауыш, n -ші ретті анықтауыш және оның қасиеттері, минор және алгебралық толықтауыштар, матрица түрлері және оған амалдар қолдану, кері матрица, матрица рангісі, сызықты теңдеулер жүйесі және оның шешімін табудың әртүрлі әдістері қарастырылған.

Екінші тарау векторлық алгебра элементтері тақырыбына арналған. Онда вектор және оған сызықты амалдар қолдану, векторлардың скалярлық, векторлық және аралас көбейтінділері, векторлардың сызықты тәуелділігі берілген.

Үшінші тарау аналитикалық геометрия элементтері тақырыбына арналған. Онда аналитикалық геометрия есептері, жазықтықтағы және кеңістіктегі түзудің теңдеуі, жазықтық теңдеулері, екінші ретті қисықтар және екінші ретті беттер келтірілген.

Әр тақырып бойынша теориялық материалдармен бірге оларды толықтыратын үлгі-мысалдар шешімдерімен және әрбір тақырыптардан кейін студенттер өз-бетімен шығаруы үшін жаттығулар жауаптарымен және әрбір тараудан соң 30 нұсқадан тұратын есептеу-графикалық жұмыстар және осы жұмыстарды орындау үшін үлгі есебінде есепті шығару жолдары берілген.

1 Сызықтық алгебра элементтері

1.1 Анықтауыштар

1.1.1 Екі белгісізі бар екі сызықтық теңдеулер жүйесі және екінші ретті анықтауыш.

Екі белгісізі бар екі сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1)$$

мұндағы a_{ij} - жүйенің коэффициенттері нақты сандар (бірінші индекс i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз айнымалы нөмірін көрсетеді);

x_1, x_2 – белгісіз айнымалылар;

b_1, b_2 – бос мүшелер.

Егер $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2$ - сандары (1.1) теңдеулер жүйесіндегі теңдеулерді қанағаттандырса, онда осы сандар сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

Осы теңдеулер жүйесін шешу үшін бірінші теңдеудің екі жағын $-a_{21}$, ал екіншісін a_{11} көбейтіп, оларды қоссақ, онда:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \quad (1.2)$$

Осыдан

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.3)$$

Осы сияқты

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.4)$$

Егер $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар.

Осы алынған $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ өрнекті екінші ретті анықтауыш деп айтады және былай белгіленеді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}, \quad (1.5)$$

мұндағы a_{ij} , $i = 1, 2, j = 1, 2$ сандары – екінші ретті анықтауыш элементтері, ал i жол, ал j баған нөмірін анықтайды.

(1.3), (1.4) бөлшектерінің алымдағы өрнектерін де:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot b_1 - a_{12} \cdot b_2; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot b_2 - a_{21} \cdot b_1$$

деп жазуға болады және бұл анықтауыштар (1.5) анықтауышынан белгісіздердің коэффициенттерін сәйкес бос мүшелерімен алмастырғанда пайда болады.

Сондықтан, x_1, x_2 белгісіздерін анықтауыш арқылы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

табуға болады. Бұл формула екі белгісізі бар екі сызықтық теңдеулер жүйесін шешу үшін қолданылатын Крамер формуласы болып табылады.

Екі белгісізі бар екі сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табу кезінде келесі үш жағдай болады:

1) Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар.

2) Егер $\Delta = 0$, $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің шексіз көп шешімі бар. Бұл жағдайда осы анықтауыштардан:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}$$

болады, яғни екі белгісізі бар бір теңдеу аламыз.

3) Егер $\Delta = 0$, $\Delta_1 \neq 0$ немесе $\Delta_2 \neq 0$ болса, онда (1.1) теңдеулер жүйесінің шешімі жоқ.

1.1 мысал. $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі: $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 - (-3) \cdot (-2) = 20 - 6 = 14.$

1.2 мысал. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 10 \\ 6x_1 + 5x_2 = 14 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі: келесі анықтауыштарды есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 6 \cdot (-3) = 5 + 18 = 23 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = 10 \cdot 5 - 14 \cdot (-3) = 50 + 42 = 92;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 6 & 14 \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 - 6 \cdot 10 = 14 - 60 = -46.$$

Сонымен:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{92}{23} = 4; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-46}{23} = -2.$$

1.1.2 Үш белгісізі бар біртекті екі сызықтық теңдеулер жүйесі.

x_1, x_2, x_3 белгісізі бар бір текті екі сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

мұндағы a_{ij} - жүйенің коэффициенттері нақты сандар (бірінші индекс i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз айнымалы нөмірін көрсетеді);

x_1, x_2, x_3 – белгісіз айнымалылар;

b_1, b_2 – бос мүшелер.

(1.6) теңдеуінің шешімін табу үшін x_3 белгісізін белгілі деп есептеп, x_1, x_2 белгісіздерін табамыз. Ол үшін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = -a_{23}x_3 \end{cases}$$

немесе

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_1 = - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_3; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot x_2 = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot x_3.$$

Егер

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

белгілеулер енгізсек, онда:

$$\begin{aligned} \Delta_3 \cdot x_1 &= \Delta_1 \cdot x_3; \\ \Delta_3 \cdot x_2 &= -\Delta_2 \cdot x_3. \end{aligned}$$

Егер осы анықтауыштардың ең болмаса біреуі нөлге тең болмаса, онда (1.6) теңдеуінің шешімі:

$$x_1 = \Delta_1 \cdot t; \quad x_2 = -\Delta_2 \cdot t; \quad x_3 = \Delta_3 \cdot t \quad (1.7)$$

формуласымен табылады, мұндағы t – кез келген тұрақты сан.

Егер $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ анықтауыштарының барлығы нөлге тең болса, онда (1.6) теңдеуінің коэффициенттері пропорционал болады:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}}.$$

Бұл жағдайда, (1.6) теңдеуі үш белгісізі бар бір теңдеуге айналады және оның шешімін табу үшін осы теңдеудің екі белгісізіне кез келген сандық мән беріп үшінші белгісізді табу керек.

1.3 мысал.
$$\begin{cases} -x + 3y + 2z = 0 \\ 4x + 5y - 6z = 0 \end{cases}$$
 бір текті теңдеулер жүйесін шешу керек.

Шешуі: келесі анықтауыштарды есептейміз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = -28; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -2; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -17.$$

Сонымен,

$$x_1 = \Delta_1 \cdot t = -28t; \quad x_2 = -\Delta_2 \cdot t = 2t; \quad x_3 = \Delta_3 \cdot t = -17t.$$

1.1.3 Үш белгісізі бар үш сызықтық теңдеулер жүйесі және үшінші ретті анықтауыш.

Үш белгісізі бар үш сызықтық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}, \quad (1.8)$$

мұндағы a_{ij} - жүйенің коэффициенттері нақты сандар (бірінші индекс i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз айнымалы нөмірін көрсетеді);

x_1, x_2, x_3 - белгісіз;

b_1, b_2, b_3 - бос мүшелер.

Егер $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3$ - сандары (1.8) теңдеулер жүйесіндегі теңдеулерді қанағаттандырса, онда осы сандар сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

Осы теңдеулер жүйесін шешу үшін бірінші теңдеудің екі жағын $a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$, екіншісін $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, ал үшіншісін $a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}$, көбейтіп, оларды қоссақ, онда:

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ & - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32})x_1 = b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{13}a_{32} + \\ & + b_3a_{12}a_{23} - b_3a_{12}a_{22} - b_2a_{12}a_{33} - b_1a_{23}a_{32}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Осы (1.7) теңдігіндегі x_1 белгісізінің коэффициентін, яғни:

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

өрнегін үшінші ретті анықтауыш деп айтады және былай белгіленеді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}.$$

Үшінші ретті анықтауыштың мәні Саррюс (немесе үшбұрыштар) ережесі деп аталатын келесі сұлба бойынша былай есептелінеді:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

мұнда алғашқы үш қосылғыш өз таңбасымен, соңғы үш қосылғыш қарама-қарсы таңбасымен алынады.

Осы белгілеуді пайдаланып, (1.9) теңдігінің оң жағындағы өрнекті:

$$\Delta_1 = b_1 a_{22} a_{33} + b_2 a_{13} a_{32} + b_3 a_{12} a_{23} - b_3 a_{12} a_{22} - b_2 a_{12} a_{33} - b_1 a_{23} a_{32} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

деп жазуға болады. Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Осы сияқты

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}},$$

мұндағы $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - (1.10) анықтауышынан x_1, x_2, x_3 белгісіздердің бағандарын сәйкес бос мүшелермен алмастырғанда пайда болған анықтауыштар.

Бұл формула үш белгісізі бар үш сызықтық теңдеулер жүйесін шешу үшін қолданылатын Крамер формуласы болып табылады.

Үш белгісізі бар үш сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімін табу кезінде келесі үш жағдай болуы мүмкін:

1) Егер $\Delta \neq 0$ болса, онда (1.8) теңдеулер жүйесінің жалғыз шешімі бар.

2) Егер $\Delta = 0, \Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \Delta_3 = 0$ болса, онда (1.8) теңдеулер жүйесінің шексіз көп шешімі бар.

3) Егер $\Delta = 0, \Delta_1 \neq 0$ немесе $\Delta_2 \neq 0$ немесе $\Delta_3 \neq 0$ болса, онда (1.8) теңдеулер жүйесінің шешімі жоқ.

1.4 мысал. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ анықтаушысын есептеу керек.

Шешуі: Саррюс ережесі бойынша, яғни (1.10) формуласын пайдалансақ, онда:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-5) \cdot (-3) - \\ -3 \cdot 2 \cdot (-3) - 2 \cdot (-5) \cdot 1 - (-1) \cdot 4 \cdot 6 = 24 + 12 - 15 + 18 + 10 + 24 = 73.$$

1.5 мысал. $\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін Крамер формула-

сымен шешу керек.

Шешуі: келесі анықтауыштарды есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 12 - 3 + 8 + 2 - 45 = -30 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 48 - 42 + 32 + 28 - 0 = -30;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 140 + 0 - 16 + 56 - 0 - 240 = -60;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 160 - 56 + 0 - 0 + 16 - 210 = -90.$$

Сонымен

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-30}{-30} = 1; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-60}{-30} = 2; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-90}{-30} = 3.$$

1.1.4 n -ші ретті анықтауыш және оның қасиеттері.

n - ші ретті анықтауыш деп n жолдан және n бағаннан тұратын квадраттық кесте түрінде берілген санды айтады және ол былай белгіленеді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1 j_2 \dots j_n]} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{nj_n},$$

мұндағы қосу белгісі $1, 2, 3, \dots, n$ сандарынан анықталған барлық алмастырулар бойынша алынған (барлық алмастыру саны $n!$ -ға тең), a_{ij} ($i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$) анықтауыштың элементтері және ол i -жол мен j -бағанының қиылысуында орналасқан.

n - ші ретті анықтауыш n жол және n бағандардан тұрады, бірінші i индексі жолдың, ал екінші j индексі бағанның нөмірін көрсетеді. Барлық элемент саны n^2 -қа тең, ал оның $\frac{n!}{2}$ қосылғышының (мүшесінің) таңбасы плюс, қалғаны минус таңбасымен алынған, яғни плюс пен минус таңбасымен алынған қосылғыштардың саны тең. Әр қосылғыш осы анықтауыштың n элементінің көбейтіндісінен, ал әр көбейткіш анықтауыштың жатық және тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталады.

Төртінші және одан да жоғарғы ретті анықтауыштарды есептеу үшін анықтауыштың қасиеттерін білу қажет.

Анықтауыш қасиеттері.

1) Анықтауыштың жолын (не бағанын) сәйкес бағанымен (не жолымен) орын алмастырсақ (транспонирлесек), онда анықтауыштың мәні өзгермейді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

2) Анықтауыштың екі жолының (бағанының) орнын алмастырсақ, онда анықтауыш таңбасы қарама-қарсыға өзгереді.

3) Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтерін k санына көбейтсек, онда анықтауыш мәні k есе артады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

4) Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтері нөлге тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

5) Анықтауыштың екі жолының (бағанының) сәйкес элементтері тең болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

6) Анықтауыштың екі жолының (бағанының) сәйкес элементтері пропорционал болса, онда анықтауыш нөлге тең болады.

7) Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) элементтері екі қосылғыштан тұрса, онда ол анықтауыш мәні екі анықтауыштың мәндерінің қосындысына тең болады:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

8) Анықтауыштың қандай да бір жолының (бағанының) барлық элементтерін k санына көбейтіп, екінші бір жолының (бағанының) сәйкес элементтеріне қоссақ, онда анықтауыш мәні өзгермейді:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

1.1.5 Минор және алгебралық толықтауыштар.

n - ші ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің M_{ij} миноры деп, осы анықтауыштың i -ші жатық, j -ші тік жолдарын сызып тастағанда пайда болған $(n-1)$ -ші ретті анықтауышты айтады, яғни:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың a_{ij} элементінің A_{ij} алгебралық толықтауышы деп, $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған осы элементтің минорын айтады, яғни:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

1.1 теорема. Егер Δ анықтауышының j -ші тік (жатық) жолының a_{ij} элементінен өзге барлық элементтері нөлге тең болса, онда Δ анықтауыштың

мәні a_{ij} элементі мен оның A_{ij} алгебралық толықтауышының көбейтіндісіне тең болады:

$$\Delta = A_{ij} \cdot a_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij}.$$

Дәлелдеуі. Үшінші ретті анықтауыш үшін:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} = a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) = \\ &= a_{11} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} a_{11} M_{11}. \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

1.2 теорема (анықтауышты тік немесе жатық жолдары арқылы жіктеу).

Анықтауыштың кез келген тік (жатық) жолдарының элементтері мен оның алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең болады:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \dots + a_{nj} A_{nj} = \\ &= a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \dots + a_{in} A_{in}. \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. Үшінші ретті анықтауышты бірінші тік жолы арқылы жіктейік, сонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}.$$

Осы теңдікті дәлелдейік:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{13} a_{21} a_{32} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} \\ &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{31} (a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}) = \\ &= a_{11} (-1)^{1+1} M_{11} + a_{21} \cdot (-1)^{2+1} M_{21} + a_{31} \cdot (-1)^{3+1} M_{31} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31}. \end{aligned}$$

Теорема дәлелденді.

1.6 мысал. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышының a_{21} элементінің минорын

есептеу керек.

Шешуі: $a_{21} = -5$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11.$

1.7 мысал. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$ анықтауышын екінші баған элементтері

арқылы жіктеп есептеу керек.

Шешуі: 1.2 теоремасын пайдалансақ, онда:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = (-1) \cdot A_{12} + 2 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{32} =$$

$$= -(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -23.$$

1.8 мысал. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ анықтауышын есептеу керек.

Шешуі: келесі түрлендірулерді жасаймыз:

1) 2-ші жол элементтерін (-3)-ке көбейтіп, 1-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз.

2) 3-ші жол элементтеріне 2 еселенген 2-ші жол элементтерін қосамыз.

3) 4-ші жол элементтерінен 2-ші жол элементтерін шегереміз. Сонда берілген анықтауыштардың түрі мынадай болады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

1.1 теоремасын пайдаланып, анықтауышты 1-ші баған элементтері бойынша жіктейміз:

$$\Delta = 1 \cdot A_{21} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

1-ші жол элементтерін 2-ші және 3-ші жол элементтеріне қосамыз, сонда:

$$\Delta = - \begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Осы анықтауышты 2-ші не 3-ші жол немесе 1-ші баған элементтері бойынша жіктеуге болады. Мысалы, 2-ші жол бойынша жіктейік:

$$\Delta = 7 \cdot A_{22} = 7 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} = 7(-10+0) = -70.$$

Жаттығулар.

Берілген анықтауыштарды есептеу керек:

1) $\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}.$

2) $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}.$

3) $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}.$

Жауабы: 2.

Жауабы: 30.

Жауабы: -31.

Берілген теңдеулер жүйесін Крамер формуласы шешу керек:

4) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 = -19 \\ 3x_1 - 2x_2 = 23 \end{cases}.$

5) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 = 22 \end{cases}.$

6) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = 25 \\ 9x_1 + 8x_2 = 6 \end{cases}.$

Жауабы: (5;-4).

Жауабы: (6; 1).

Жауабы: (-2; 3).

Берілген бір текті сызықтық теңдеулер жүйесін шешу керек:

7) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}.$

8) $\begin{cases} 8x - 5y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}.$

Жауабы: $x = 2t, y = 5t, z = 4t.$

Жауабы: $x = 3t, y = 9t, z = 21t.$

Берілген анықтауыштарды:

а) Саррюс ережесі бойынша;

ә) 1-ші жол элементтері бойынша жіктеп;

б) 2-ші баған элементтері бойынша жіктеп есептеу керек.

9) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$

10) $\begin{vmatrix} -1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 9 \\ 7 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$

11) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -7 & 8 \end{vmatrix}.$

Жауабы: -56.

Жауабы: 136.

Жауабы: -180.

12) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$

13) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -3 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$

14) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -5 & 5 & 6 \\ -6 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

Жауабы: 18.

Жауабы: 100.

Жауабы: 78.

Берілген теңдеулер жүйесін Крамер формуласы шешу керек:

15) $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$

16) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ -2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = -15 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Жауабы: (-1;-2;3).

$$17) \begin{cases} 7x_1 + \quad + 5x_3 = 11 \\ -4x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

Жауабы: (-2;3;5).

$$19) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \quad = 11 \\ \quad 5x_2 + 6x_3 = 28 \\ x_1 + \quad + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

Жауабы: (1;2;3).

Жауабы: (1;-1;2).

$$18) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

Жауабы: (2;4;-3).

$$20) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Жауабы: (1;2;3).

Берілген анықтауыштарды есептеу керек:

$$21) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Жауабы: 28.

$$22) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -7 \end{vmatrix}.$$

Жауабы: 12.

$$23) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

Жауабы: 180.

$$24) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}.$$

Жауабы: 12.

1.2 Матрица

1.2.1 Негізгі ұғымдар.

m – жатық және n - тік жолдардан құралған тік бұрышты кесте түрінде берілген сандар жиынын $m \times n$ өлшемді матрица дейді, ол былай белгіленеді:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{немесе} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

мұндағы (a_{ij}) , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ - матрицаның элементтері деп аталады, бірінші индекс i - матрицаның жолының, ал екінші индекс j - бағанының нөмірін анықтайды.

Егер $m = n$ болса, онда ол матрица шаршы (квадрат) матрица деп, ал n матрица реті деп аталады. Мысалы, үшінші ретті шаршы матрица былай жазылады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Шаршы матрицаның $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері оның негізгі диагоналы, ал $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементтері қосалқы диагоналы деп аталады.

Шаршы матрица элементтерінен құралған анықтауышты матрица анықтауышы деп атап, $\det A$ немесе $\Delta(A)$ деп белгілейді.

Е с к е р т у – Шаршы емес матрицаның анықтауышы болмайды, себебі анықтауыштар тек шаршы кесте түрінде беріледі.

Егер $\Delta(A) \neq 0$, онда A матрица ерекше емес матрица деп, ал егер $\Delta(A) = 0$ болса, онда ол ерекше матрица деп аталады.

Егер A матрицаның жолдары A^* матрицаның бағандары болып келсе, онда A^* матрицасын A матрицасының транспонирленген матрицасы деп атайды.

Егер шаршы A матрица элементтері үшін $a_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$ теңдігі орындалса, онда A матрицасын симметриялы деп, ал $a_{ij} = -a_{ji}$ теңдігі орындалса, онда қиғаш симметриялы деп атайды.

Егер шаршы матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен өзге элементтері нөлге тең болса, онда ол матрица диагоналды матрица деп аталады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Егер диагоналды матрицаның барлық элементтері бірге тең болса, онда ол бірлік матрица деп аталады және ол E символымен белгіленеді:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Егер шаршы матрицаның негізгі диагоналынан төмен орналасқан (жоғары орналасқан) элементтері нөлге тең болса, онда ол жоғары (төменгі) үшбұрышты матрица деп аталады:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Егер матрица бір тік (жатық) жолдан анықталса, онда ол матрица тік (жатық) жолды матрица деп аталады:

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}); \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Бірдей ретті A және B матрицаларының сәйкес элементтері тең болса, яғни $a_{ij} = b_{ij}, i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$ онда A және B тең матрицалар деп аталады.

1.2.2 Матрицаларға сызықты амалдар қолдану.

1) *Матрицаларды қосу.* Бірдей ретті $A = (a_{ij})$ мен $B = (b_{ij})$ матрицаларының алгебралық қосындысы деп сол ретті $C = (c_{ij})$ матрицасын айтады: $C = A \pm B$ және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}; i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$$

яғни

$$\begin{aligned} A \pm B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & a_{13} \pm b_{13} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & a_{23} \pm b_{23} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2) *Матрицаларды санға көбейту.* Кез келген A матрицаның α санына көбейтіндісі деп C матрицасын айтады: $C = \alpha \cdot A$ немесе $C = A \cdot \alpha$ және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Яғни

$$\alpha \cdot A = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \end{pmatrix}.$$

Матрицаны санға көбейткенде мына қасиеттер орындалады:

- сандар көбейткіштеріне терімділік қасиет $(\alpha \cdot \beta)A = \alpha(\beta A)$;
- үлестірімділік қасиет $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- сандардың қосындысына үлестірімділік қасиет $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- $(-1) \cdot A = -A$;

$$\begin{aligned}
& - 0 \cdot A = 0; \\
& - A - B = A + (-1) \cdot B.
\end{aligned}$$

1.9 мысал. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ және $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

матрицаларының қосындысын табу керек.

Шешуі:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3+1 & 5+2 & 7+4 \\ 2+2 & -1+3 & 0-2 \\ 4-1 & 3+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 11 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.10 мысал. Егер $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ болса, $2A+5B$

матрицасын табу керек.

Шешуі:

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}; \quad 5B = \begin{pmatrix} 10 & 15 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}; \quad 2A + 5B = \begin{pmatrix} 16 & 25 \\ 13 & -8 \end{pmatrix}.$$

1.2.3 Матрицаларды көбейту.

Берілген $m \times n$ -ретті A матрицаның $n \times k$ -ретті B матрицаға көбейтіндісі деп, $m \times k$ -ретті C матрицаны айтады: $C = AB$. Оның элементтері c_{ij} келесі формуламен анықталады:

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} b_{pj}; \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, k}.$$

A матрицасын B матрицасына көбейту үшін A матрицасының бағандар саны B матрицасының жолдар санына тең болуы қажет, басқаша жағдайда көбейту мүмкін емес және:

$$AB \neq BA.$$

Үшінші ретті A және B шаршы матрицаларының AB көбейтіндісін қарастырайық:

$$\begin{aligned}
C = A \cdot B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Берілген A мен B матрицаларын көбейткенде AB мен BA матрицалары бар болу үшін A мен B матрицалары бірдей ретті шаршы матрица болуы қажетті әрі жеткілікті. AB көбейту орындалғанынан BA көбейтуі бар екені шықпайды. AB мен BA көбейтінділері бар болғанымен де олар өзара тең емес, яғни $AB \neq BA$, жалпы жағдайда матрицалар көбейтінділеріне ауыстырымдылық қасиет орындалмайды.

Матрицалардың көбейтінділеріне мына қасиеттер орындалады (егер көбейтулер бар болса):

– терімділік қасиет $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

– үлестірімділік қасиет $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$; $C(A + B) = CA + CB$;

– $A \cdot E = E \cdot A = A$.

1.11 мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген.

$C=AB$ матрицасын табу керек.

Шешуі:

$$C = AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+0+10 & 4+0+3+0 \\ 1+9+0+5 & 2+6+6+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

1.12 мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары

берілген, AB және BA көбейтінділерін табу керек.

Шешуі:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 3 - 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

1.2.4 Кері матрица.

Егер A мен B матрицалары үшін AB мен BA көбейтінділері бар және $AB = BA = E$ болса, онда B матрицасын A матрицасының кері матрицасы деп атап, былай белгілейді:

$$B = A^{-1},$$

яғни

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

мұндағы E – бірлік матрица.

Кез келген шаршы A матрицаның кері матрицасы мына формуласымен анықталады:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

мұндағы A_{ij} берілген A матрицаның элементтерінің алгебралық толықтауыштары, $\Delta(A)$ – берілген A матрицасының анықтауышы.

$\Delta(A) = 0$ жағдайда A матрицасының кері матрицасы болмайды.

1.13 мысал. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасының кері матрицасын табу

керек.

Шешуі: алдымен матрицаның анықтауышын есептейді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -72 + 6 + 5 - 12 - 6 + 30 = -49 \neq 0$$

олай болса, кері матрица табылады. Ол мына формуламен анықталады:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -14;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 21;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -18;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -13.$$

Олай болса

$$A^{-1} = -\frac{1}{49} \begin{pmatrix} -14 & -1 & 2 \\ 0 & 21 & 7 \\ -7 & -18 & -13 \end{pmatrix}.$$

1.2.5 Матрица рангісі.

$m \times n$ -ші ретті A матрицасын қарастырайық. Берілген $m \times n$ -ші ретті матрицадан k ретті $C_m^k \cdot C_n^k$ - минор құруға болады, мұндағы $k \leq n, k \leq m$ $\left(C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \right)$. Бұл минорлардың кейбіреулері нөлге тең, ал кейбіреулері нөлден өзгеше.

A матрицаның нөлге тең емес минорларының ең жоғарғы реті оның рангісі деп аталады және ол $rang A$ немесе $r(A)$ деп белгіленеді.

Сонда, егер матрицаның рангісі r -ге тең болса, онда барлық r -ші ретті минорлардың кем дегенде біреуінің мәні нөлге тең емес, ал r -ден жоғарғы ретті минорлардың барлығының мәні нөлге тең. Берілген матрицаның рангісін табу үшін жоғарыдағыдай барлық минорларды есептемей табу әдістеріне тоқталайық.

Матрицаның рангісін табу үшін элементар түрлендірулер және минорларды көмкеру әдістері қолданылады.

Элементар түрлендірулер деп мына түрлендірулерді айтады:

– матрицаны транспонирлеу, яғни барлық жолдарын сәйкес бағандарымен алмастыру;

– екі жолының (бағанының) орнын ауыстыру;

– кез келген жол (баған) элементтерін $\lambda \neq 0$ санына көбейту;

– кез келген жолының (бағанының) элементтерін $\lambda \neq 0$ санына көбейтіп, басқа кез келген жолының (бағанының) сәйкес элементтеріне қосу;

– бірдей жол (баған) болса, біреуін алып тастау;

– түгелдей нөлден тұратын жолды (бағанды) алып тастау.

Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді. Элементар түрлендіру жасап кез келген матрицаны бірлік матрицаға келтіруге болады. Диагональ бойындағы бірлер саны матрицаның рангісіне тең болады.

Минорларды көмкеру әдісі мысалдар арқылы түсіндіріледі.

1.14 мысал. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ матрицасының рангісін табу керек.

Шешуі: A матрицасының рангісін минорларды көмкеру әдісі бойынша табайық. $a_{11} = 3 \neq 0$ болғандықтан, оны көмкеріп, 2-ші ретті минор аламыз.

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

2-ші ретті минор нөлге тең емес болды, оны әрі қарай көмкерейік:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

2-ші ретті минорды 3-ші жол және 4-ші бағанмен көмкерейік:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3-ші ретті екі көмкеруші минордың екеуі де 0-ге тең, ендеше, $r(A) = 2$.

1.15 мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ берілген.

Табу керек: $r(A)$.

Шешуі: 1-ші жол элементтерін -2-ге, -1-ге көбейтіп, 2-ші, 3-ші жолдардың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 1-ші бағанның элементтерін -3-ке, 1-ге, 2-ге көбейтіп, екінші, үшінші, төртінші бағандардың сәйкес элементтеріне қосамыз:

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Енді 2-ші жол элементтерін 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 2-ші бағанның элементтерін -6-ға, -1-ге көбейтіп, сәйкес үшінші, төртінші бағандардың сәйкес элементтеріне қосамыз, сосын 3-ші бағанның элементтерінің барлығы 0-ге тең болғандықтан, оны алып тастаймыз:

$$r(A) = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3.$$

Соңғы матрица рангісі 3-ке тең, себебі $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Ендеше,

берілген матрица рангісі де 3-ке тең.

Жаттығулар.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 8 & -5 & -1 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ және } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ матрицалары берілген.}$$

Табу керек:

- 1) $A + B$.
- 2) $A - B$.
- 3) $3A + 4B$.
- 4) $5A - 2B$.

A мен B матрицалары берілген, AB және BA көбейтінділерін табу керек:

$$5) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } AB = \begin{pmatrix} 5 & 23 & 18 \\ 1 & -20 & -20 \\ 15 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$6) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } AB = \begin{pmatrix} 35 & -2 & -23 \\ 7 & 10 & 5 \\ 68 & 32 & 12 \end{pmatrix}.$$

$$7) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -8 \\ -2 & 0 & 14 \\ 16 & 2 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$8) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & 10 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } AB = \begin{pmatrix} -5 & 18 & 44 \\ 15 & 63 & 80 \\ 5 & 63 & 106 \end{pmatrix}.$$

A матрицасы берілген. Кері матрицасын табу керек:

$$9) A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & -3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } A^{-1} = \frac{1}{163} \begin{pmatrix} 8 & 18 & 19 \\ -19 & -2 & 16 \\ 37 & -39 & -14 \end{pmatrix}.$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } A^{-1} = \frac{1}{41} \begin{pmatrix} 11 & 6 & -4 \\ -5 & 1 & 13 \\ 14 & -11 & -20 \end{pmatrix}.$$

$$11) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } A^{-1} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -16 & 9 & 11 \\ 9 & -3 & 0 \\ 31 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$12) A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } A^{-1} = \frac{1}{104} \begin{pmatrix} 13 & 26 & -13 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 2 & 31 \end{pmatrix}.$$

Матрица рангісін есептеу керек.

$$13) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -10 & 20 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } r(A) = 3.$$

$$14) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } r(A) = 3.$$

$$15) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } r(A) = 3.$$

$$16) A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Жауабы: } r(A) = 2.$$

1.3 Сызықты теңдеулер жүйесі

1.3.1 Негізгі ұғымдар.

n белгісізі бар m сызықты теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1.11)$$

мұндағы a_{ij} - жүйенің коэффициенттері, нақты сандар;

x_i - белгісіз шамала;

b_i - бос мүшелер, $i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, n}$;

a_{ij} - коэффициенттері екі индексмен берілген, бірінші индексі i теңдеу нөмірін, ал екінші индекс j белгісіз нөмірін көрсетеді.

$b_i \neq 0$ болса, онда жүйе біртекті емес жүйе деп аталады.

Сызықты теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінен анықталған мына матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{жүйе матрицасы};$$

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} - \text{жүйенің кеңейтілген матрицасы деп}$$

аталады.

Егер $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, - сандар жиыны (1.11) теңдеулер жүйесіндегі теңдеулердің барлығын қанағаттандырса, онда осы сандар жиыны сызықты теңдеулер жүйесінің шешімі деп аталады.

Егер (1.11) сызықты теңдеулер жүйесінің кем дегенде бір шешімі бар болса, онда ол үйлесімді жүйе, ал егер бірде-бір шешімі болмаса (жоқ болса), онда ол үйлесімсіз жүйе деп аталады. Тек бір ғана шешімі бар жүйе анықталған жүйе деп, ал кем дегенде екі шешімі бар жүйе анықталмаған жүйе деп аталады.

1.3.2 Крамер ережесі.

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1.12)$$

Берілген жүйенің белгісіздер саны теңдеулер санына тең, жүйенің негізгі матрицасы n жатық, n тік жолдардан тұрады.

(1.12) жүйенің анықтаушы нөлге тең болмасын, яғни $\Delta(A) \neq 0$:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{nk} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

анықтаушының бірінші тік жолының элементтері x_1 белгісіздің коэффициенттері, ал екінші тік жолының элементтері x_2 белгісіздің коэффициенттері, т.с.с.

Осы анықтаушының кез келген тік жолының (мысалы, k -ші тік жолының - x_k белгісізінің коэффициенттерін) элементтерін (1.12) жүйенің сәйкес бос мүшелерімен орын алмастырғанда алынған анықтаушы Δ_k таңбасымен белгілейік:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}; \quad k = \overline{1, n}.$$

К р а м е р т е о р е м а с ы. Егер (1.12) біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің негізгі матрицасының анықтаушы нөлге тең болмаса, онда ол жүйенің шешімі келесі формулалармен анықталады:

$$x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta(A)}; \quad k = \overline{1, n}.$$

К р о н е к е р – К а п е л л и т е о р е м а с ы. Біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесі үйлесімді болуы үшін жүйе матрицасының рангісі мен оның кеңейтілген матрицасының рангісі тең болуы, яғни $\text{rang } A = \text{rang } A'$, қажетті әрі жеткілікті.

$$1.16 \quad \text{мысал.} \quad \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 11x_1 - 12x_2 + 17x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{теңдеулер жүйесін үйлесімдікке}$$

зерттеу керек.

Шешуі:

$$\begin{aligned} r(A) &= r \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 11 & -12 & 17 \end{pmatrix}; \\ r(A') &= r \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & -9 & -3 \\ 0 & 21 & -27 & -19 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & -3 \\ 0 & 21 & -27 & -19 \end{pmatrix} = \\ &= r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \end{aligned}$$

$r(A) \neq r(A')$ болғандықтан, Кронекер-Капелли теоремасы бойынша берілген жүйе үйлесімсіз, яғни оның шешімі жоқ.

1.3.3 Гаусс әдісі.

Кез келген шаршы матрицаға элементар түрлендірулер қолданып үшбұрышты матрица аламыз. Берілген жүйені шешу үшін осы жүйенің кеңейтілген матрицасына элементар түрлендірулер жасау арқылы алынған үшбұрышты матрицаға сәйкес жүйені шешсек жеткілікті:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

n белгісізі бар біртекті емес m сызықты теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен шешейік.

Айнымалыларды бірте-бірте жоя отырып жүйені өзіне эквивалент баспалдақты түрге келтіреміз.

Баспалдақты түр деп:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \quad \quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \quad \quad \quad a'_{mm}x_m + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases}$$

түрдегі жүйені айтады. Егер $m = n$ болса, онда жүйе үшбұрышты түрге келеді.

Айнымалыларды бірте-бірте жою жүйені элементар түрлендіру арқылы жасалады. Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді.

Оған келесі түрлендірулер жатады:

а) екі теңдеудің орнын алмастыру;

ә) нөлден өзге санға теңдеудің екі жағын да көбейту;

б) кез келген $c \neq 0$ санға көбейтілген бір теңдеудің екі жағын да басқа теңдеуге сәйкесінше қосу.

Егер элементарлық түрлендіру нәтижесінде теңдеудің екі жағында да коэффициенттер нөлге тең болса, онда бұл теңдеуді кез келген айнымалы қанағаттандырады. Бұл теңдеуді алып тастай салуға болады. Ал сол жағындағы коэффициенттер нөлге тең болып, оң жағындағы бос мүше нөлге тең болмаса, онда жүйе үйлесімсіз, оған эквивалент берілген жүйе де үйлесімсіз болады.

Егер жүйе үйлесімді болса, онда шешімдерді табу үшін жүйенің ең соңғы n -ші теңдеуінен x_n белгісізін тауып, оны $n-1$ -ші теңдеуге қойып, одан x_{n-1} белгісізді табады. Осылайша, ең соңында бірінші теңдеуден x_1 -ді табады.

$$1.17 \text{ мысал. } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \text{ теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен}$$

шешу керек.

Шешуі: 1-ші теңдеуді (-3)-ке көбейтіп, 2-ші теңдеуге, сосын 1-ші теңдеуді (-2)-ге көбейтіп, 3-ші теңдеуге қосамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ -7x_2 + 23x_3 = -46 \\ -x_2 + 10x_3 = -20 \end{cases}$$

Енді 3-ші теңдеуді (-7)-ге көбейтіп, 2-ші теңдеуге қосамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ -x_2 + 9x_3 = -18 \\ -47x_3 = 94 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ x_2 + 9x_3 = -18 \\ x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

$$1.18 \text{ мысал. } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases} \text{ теңдеулер жүйесін Гаусс әдісімен}$$

шешу керек.

Шешуі: жүйенің кеңейтілген матрицасын құрып, элементар түрлендіру жасаймыз. Ыңғайлылық үшін 1-ші және 2-ші теңдеулердің орын алмастырайық:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right).$$

Мұнда 1-ші жолды (-3)-ке көбейтіп 2-ші жолға, сосын сол 1-ші жолды (-4)-ке көбейтіп 3-ші жолға қостық. Енді 2-ші жолды (-5)-ке көбейтіп 3-ші жолға қосайық:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Мұнда 3-ші жолды (-11)-ге қысқарттық.

Теңдеулер жүйесі үшбұрышты түрге келіп, шешімі табылады:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + 4x_3 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2 = 0 \\ -x_2 + 8 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 3 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{cases}.$$

1.3.4 Матрица әдісі

n белгісізі бар біртекті емес n сызықты теңдеулер жүйесі берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

мұндағы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - жүйе матрицасы ерекше емес

$(\Delta(A) \neq 0)$;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ - белгісіз, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ - бос мүше, $n \times 1$ өлшемді матрицалар.

Матрицаларға қолданылатын амалдарға сүйене отырып A мен X матрицалардың көбейтіндісі (бұл көбейтінді анықталған – бар) мына матрицаға тең деп аламыз. Сонда:

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = B; \quad AX = B. \quad (1.13)$$

(1.13) теңдеуі берілген жүйенің матрица түріндегі теңдеуі деп аталады.

Берілген жүйенің матрицасы ерекше емес ($\Delta(A) \neq 0$) матрица, олай болса оның кері матрицасы бар.

Енді (1.13) теңдеуінің шешімін табу үшін осы теңдеуді солдан оңға қарай A матрицасының кері матрицасына көбейтейік $A^{-1}AX = A^{-1} \cdot B$, мұндағы $A^{-1} \cdot A = E$ және $E \cdot X = X$. Олай болса $X = A^{-1}B$ болады, мұндағы $A^{-1}B$ - көбейтіндісі бар.

1.19 мысал.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + \quad \quad 2x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -2 \end{cases} \quad \text{теңдеулер жүйесін матрицалық}$$

әдіспен шешу керек.

Шешуі: матрицаларды жазайық:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \Delta(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

A матрицасы ерекше емес, сондықтан оның кері матрицасы бар болады:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Енді алгебралық толықтауыштарды есептейік:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; & A_{21} &= - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4; \\ A_{12} &= - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; & A_{32} &= - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5; \end{aligned}$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6;$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 32-8 \\ -36+10 \\ -40+12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 24 \\ -26 \\ -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6,5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Берілген жүйенің шешімі $x_1 = -6$, $x_2 = \frac{13}{2}$, $x_3 = 7$ болады.

Жаттығулар.

Берілген теңдеулер жүйесін үйлесімдікке зерттеу керек:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Жауабы: үйлесімді.

$$3) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ 5x_1 - 7x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Жауабы: үйлесімсіз.

$$5) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Жауабы: үйлесімді.

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Жауабы: үйлесімді.

$$4) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Жауабы: үйлесімсіз.

$$6) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Жауабы: үйлесімсіз.

Берілген сызықтық теңдеулер жүйесін:

а) Крамер формулаларымен;

ә) Гаусс әдісімен;

б) Матрица әдісімен шешіңіз.

$$7) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$$

Жауабы: (1;5;2).

$$8) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7. \end{cases}$$

Жауабы: (1; 2;0)

$$9) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

Жауабы: (3;8;13).

$$11) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6 \end{cases}$$

Жауабы: (8;4;2).

Жауабы: (1;1;1).

$$12) \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Жауабы: (3;-1;0).

Сызықтық алгебра элементтері тақырыбына арналған есептеу-сызбалық жұмыстар.

1. Үшінші ретті анықтауыш берілген.

а) $a_{32}; a_{13}$ элементтердің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын;

ә) анықтауышты бірінші жолы бойынша жіктеп;

б) анықтауышты екінші бағаны бойынша жіктеп;

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептеу керек.

1	$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	22	$\begin{vmatrix} 4 & -6 & 3 \\ 6 & -9 & 6 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$	13	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -5 & -4 & 5 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} -5 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{vmatrix}$	25	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & 5 \\ 4 & -4 & 1 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 9 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 7 & 2 & -6 \\ 2 & 9 & 2 \\ -6 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	28	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$	19	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{vmatrix}$	29	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 8 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \\ 4 & -3 & -4 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} -4 & 6 & -3 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

2. Берілген төртінші ретті анықтауышты есептеу керек.

1	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$	11	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -6 \\ 3 & -2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$	21	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$	12	$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	22	$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	13	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ 5 & -3 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$	23	$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

4	$\begin{vmatrix} 4 & -5 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -6 & 8 \end{vmatrix}$	14	$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$	24	$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$	15	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	25	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -5 \\ 4 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$	16	$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	26	$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$	17	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	27	$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -4 & 0 \end{vmatrix}$
8	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \end{vmatrix}$	18	$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	28	$\begin{vmatrix} 6 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & -5 & 4 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 & 7 \\ 4 & -8 & 2 & -3 \\ 10 & 1 & -5 & 4 \\ -8 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$	20	$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$	30	$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

3. A және B матрицалары берілген.

Табу керек:

а) $A \cdot B$;

ә) $B \cdot A$;

б) A^{-1} ;

в) $A \cdot A^{-1}$.

№	A	B	№	A	B
1	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & -5 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	16	$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$	17	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	18	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	19	$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 1 & -8 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 7 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$
5	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	20	$\begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 \\ 5 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 25 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
6	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	21	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -1 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	22	$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	23	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

9	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	24	$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	25	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	26	$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 10 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$	27	$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$	28	$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ 1 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	29	$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -1 & 9 & 2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 4 & -9 & 3 \\ 2 & -7 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 5 & -6 & 4 \\ 7 & -4 & 1 \end{pmatrix}$	30	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Берілген теңдеулер жүйесін шешу керек:

а) Крамер әдісімен;

ә) Матрицалық әдіспен;

б) Гаусс әдісімен.

1	$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$	11	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x - 5y - 3z = 14 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$	21	$\begin{cases} 7x + 4y + z = 13 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \\ 2x - 3y + z = -10 \end{cases}$
---	--	----	--	----	---

2	$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$	12	$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 4x - 3y + z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$	22	$\begin{cases} x + 4y - z = -9 \\ 4x - y + 5z = -2 \\ 3y - 7z = -9 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$	13	$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 14 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$	23	$\begin{cases} 5x + 2y - 4z = -16 \\ x + 3z = -6 \\ 2x - 3y + z = 9 \end{cases}$
4	$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ x - 4y - 2z = -3 \\ -3x + 5y + 6z = 7 \end{cases}$	24	$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 33 \\ 7x - 5y = 24 \\ 4x + 11z = 39 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 2x - y - z = 4 \\ 3x + 4y - 2z = 11 \\ 3x + 2y + 4z = 11 \end{cases}$	15	$\begin{cases} 5x + 8y + z = 7 \\ 2x - 3y + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$	25	$\begin{cases} 3x + 4y - 2z = 11 \\ 2x - y - z = 4 \\ 3x - 2y + 4z = 11 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 8 \\ 2x - y - z = -4 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$	16	$\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8 \\ 2x - 4y - 3z = -1 \\ x + 5y + z = 0 \end{cases}$	26	$\begin{cases} 3x - y - z = 12 \\ x + 2y - 4z = 6 \\ 5x + y + 2z = 3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 7x - 5y = 8 \\ 4x + 11z = -43 \\ 2x + 3y + 4z = -20 \end{cases}$	17	$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ 4x + y - 3z = 3 \end{cases}$	27	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = 11 \end{cases}$
8	$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$	18	$\begin{cases} x - 4y - 2z = -3 \\ 3x + y + z = 5 \\ 3x - 5y - 6z = -9 \end{cases}$	28	$\begin{cases} 2x - y + 2z = 8 \\ x + y + 2z = 11 \\ 4x + y + 4z = 22 \end{cases}$
9	$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 8x + 3y - 6z = 2 \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$	19	$\begin{cases} 7x - 5y = 24 \\ 4x + 11z = 39 \\ 2x + 3y + 4z = 33 \end{cases}$	29	$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 5 \\ 2x + 3y - 4z = 12 \\ x - 2y + 3z = -1 \end{cases}$
10	$\begin{cases} x - 2y + 3z = 6 \\ 2x + 3y - 4z = 20 \\ 3x - 2y - 5z = 6 \end{cases}$	20	$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 20 \\ 3x - y + z = 9 \end{cases}$	30	$\begin{cases} -3x + 5y + z = -8 \\ 3x + y + z = -4 \\ x - 4y - 2z = -9 \end{cases}$

Тапсырмаларды шығару жолы.

$$1. \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \text{ анықтауышы берілген.}$$

а) $a_{32}; a_{13}$ элементтердің минорлары мен алгебралық толықтауыштарын;

ә) анықтауышты бірінші жолы бойынша жіктеп;

б) анықтауышты екінші бағаны бойынша жіктеп;

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептеу керек.

Шешуі:

а) a_{32} және a_{13} элементтерінің M_{32} және M_{13} минорларын есептейміз:

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - (-2) \cdot 4 = 8; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 - (-3) \cdot 2 = 18.$$

Енді осы элементтердің алгебралық толықтауышын есептейміз;

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 8 = -8;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = (-1)^{1+3} \cdot 18 = 18;$$

ә) анықтауышты бірінші жолы бойынша жіктеп есептейміз:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 5 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - 4 \cdot (-4) - 2 \cdot 18 = -5. \end{aligned}$$

б) анықтауышты екінші бағаны бойынша жіктеп есептейміз:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \\ &= 4 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -4 \cdot (-4) + (-3) \cdot (-1) - 3 \cdot 8 = -5. \end{aligned}$$

в) анықтауышты үшбұрыш (Саррюс) ережесі бойынша есептейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 \cdot 2 + (-2) \cdot 4 \cdot 3 -$$

$$(-2) \cdot (-3) \cdot 2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 0 \cdot 3 = 15 - 24 - 12 + 16 = -5.$$

$$2. \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} - \text{анықтауышын есептеу керек.}$$

Шешуі: келесі түрлендірулерді жасаймыз:

1) 1-ші жол элементтерін 2-ге көбейтіп, 2-ші жолдың сәйкес элементтеріне.

2) 1-ші жол элементтерін (-3)-ке көбейтіп, 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне.

3) 1-ші жол элементтерін (-4)-ке көбейтіп, 4-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз.

Сонда берілген анықтауыштардың түрі мынадай болады:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 11 \\ 0 & -2 & -10 & -10 \\ 0 & -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}.$$

Бұл анықтауышты 1-ші баған элементтері бойынша жіктейміз:

$$\Delta = 1 \cdot A_{11} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ -2 & -10 & -10 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & 5 & 5 \\ -5 & -14 & -17 \end{vmatrix}.$$

4) 2-ші жол элементтерін 5-ге көбейтіп, 3-ші жолдың сәйкес элементтеріне.

5) 2-ші жол элементтерін (-5)-ке көбейтіп, 1-ші жолдың сәйкес элементтеріне қосамыз.

Сонда берілген анықтауыштардың түрі мынадай болады:

$$\Delta = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -23 & -14 \\ 1 & 5 & 5 \\ 0 & 11 & 8 \end{vmatrix}.$$

Бұл анықтауышты 1-ші баған элементтері бойынша жіктейміз:

$$\Delta = -2 \cdot 1 \cdot A_{21} = -2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -23 & -14 \\ 11 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-23 \cdot 8 + 14 \cdot 11) = 2 \cdot (-184 + 154) = -60.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген.

Табу керек:

а) $A \cdot B$;

ә) $B \cdot A$;

б) A^{-1} ;

в) $A \cdot A^{-1}$.

Шешуі:

$$\text{а) } A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-5) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-5) + 1 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-5) + 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & -1 \\ 2 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ә) } B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + (-5) \cdot (-1) + 4 \cdot 0 & 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 1 + 4 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \\ 7 & -1 & 4 \end{pmatrix};$$

б) A матрицасына A^{-1} кері матрицасын:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta(A)} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

формуласымен анықтаймыз. A^{-1} - тек қана $\det A \neq 0$ болған жағдайда ғана табылады, сондықтан, анықтауышты есептейміз:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 1 + 0 - 1 - 2 - 0 = -4 \neq 0$$

яғни кері матрица болады.

Енді барлық алгебралық толықтауыштарды есептейміз:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-1) = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(1-0) = -1;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1=3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -(0-1) = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1=0; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2-2=-4.$$

A^{-1} кері матрицаны жоғарыда көрсетілген формула бойынша табайық:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } A^{-1} \cdot A &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 & -1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & -1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & -1 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 & -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$4. \begin{cases} x + 2y + 4z = -2 \\ x + 3y + 6z = 1 \\ x + 3y + 7z = -3 \end{cases} \quad \text{теңдеулер жүйесін төмендегі әдістермен шешу}$$

керек:

1) Крамер әдісімен;

2) Матрицалық әдіспен;

3) Гаусс әдісімен.

Шешуі:

1) Крамер формуласы:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 12 + 12 - 12 - 18 - 14 = 1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ -3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -42 - 36 + 12 + 36 - 14 = -8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 12 - 12 - 4 + 18 + 14 = 11;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 2 - 6 + 6 - 3 + 6 = -4;$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{1} = -8; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{11}{1} = 11; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-4}{1} = -4.$$

2) Матрицалық әдіс:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}; \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad AX = B.$$

Теңдеудің шешімі: $X = A^{-1} \cdot B$.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 + 12 + 12 - 14 - 18 - 12 = 1;$$

$\det A \neq 0$ – сондықтан A матрицасының A^{-1} кері матрицасын табуға болады.

A матрицасының алгебралық толықтауыштарын табамыз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 18 = 3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 + 6 = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 12 = -2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 4 = 3; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Белгісіздерді табу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$x = 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) = -6 - 2 = -8; \quad x = -8;$$

$$y = -1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) = 2 + 3 + 6 = 11; \quad y = 11;$$

$$z = 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = -1 - 3 = -4; \quad z = -4.$$

3) Гаусс әдісі. Кеңейтілген A^k матрицасын жазайық:

$$A^k = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & -3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right)$$

жүйе үйлесімді, себебі $r_A = r_{A^k} = 3$, сондықтан берілген жүйе анықталған, оның бір ғана шешімі бар. Соңғы матрицаны теңдеулер түрінде жазайық:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = -2 \\ y + 2z = 3 \\ z = -4. \end{cases}$$

Жүйенің соңғы теңдеуінен $z = -4$ екенін көруге болады, ол мәнді екінші теңдеуге қойсақ $y + 2(-4) = 3 \Rightarrow y = 11$. Табылған z және y мәндерін жүйенің бірінші теңдеуіне қоямыз: $x + 2 \cdot 11 + 4 \cdot (-4) = -2 \Rightarrow x = -8$.

Сонымен жүйенің шешімі $x = -8, y = 11, z = -4$.

Бақылау сұрақтары.

1. Анықтауыш дегеніміз не?
2. Екінші ретті анықтауыш қалай есептелінеді?
3. Үшінші ретті анықтауыш қалай есептелінеді?
4. Анықтауыштың қандай қасиеттері бар?
5. Қандай анықтауыштар нөлге тең болады?
6. Минор дегеніміз не?
7. Алгебралық толықтауыш дегеніміз не?
8. Анықтауыштың мәні жол немесе баған бойынша жіктеу арқылы қалай есептелінеді?
9. Анықтауыштың мәні оның қасиеттерін пайдалану арқылы қалай есептелінеді?
10. Матрица дегеніміз не және оның қандай түрлері бар?
11. Квадраттық матрица дегеніміз не?
12. Матрицаның анықтауышы дегеніміз не?
13. Ерекше емес матрица дегеніміз не?
14. Матрицаларды қосу және санға көбейту.
15. Матрицаларды көбейту.
16. Кері матрица қалай есептелінеді?
17. Матрицаның рангісін қалай табамыз?
18. Біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесі.
19. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесі.
20. Сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімі.
21. Біртекті емес сызықты теңдеулер жүйесінің үйлесімді болу шарты.
22. Теңдеулер жүйесінің шешімін Крамер ережесімен табу.
23. Теңдеулер жүйесінің шешімін Гаусс әдісімен табу.
24. Теңдеулер жүйесінің шешімін Матрицалық әдіспен табу.

2 Векторлық алгебра элементтері

2.1 Негізгі ұғымдар

Кез келген сандар математикада, физикада, механикада және т.б. қолданбалы мамандықтарда екі түрлі шамамен сипатталады. Оң немесе теріс санмен толық сипатталатын шамаларды скаляр шамалар деп, ал сандық мәнімен қоса бағытын да білу қажет шамаларды векторлық шамалар деп атайды. Мысалы, үдеу, жылдамдық, күш – векторлық шамалар болып табылады.

Вектор деп бағытталған кесіндіні айтады.

Берілген вектор үлкен екі латын әріпімен немесе кіші бір латын әріптерімен белгіленеді. Мысалы, $\overrightarrow{AB}$ - вектор, A нүктесі осы вектордың бастапқы нүктесі, ал B - соңғы нүктесі, вектордың бағыты A нүктеден B нүктеге бағытталған (2.1 сурет).



2.1 сурет

Берілген $\overrightarrow{AB}$ векторының ұзындығы: $|\overrightarrow{AB}|$ немесе $|\vec{a}|$ деп белгіленеді.

$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ - нөлдік вектор.

$|\vec{e}| = 1$ болса, онда $\vec{e}$ - бірлік вектор.

Үш өлшемді R^3 кеңістігінде декарттық координат жүйесі енгізілсін.

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$ - нүктелері берілсе, онда $\overrightarrow{AB}$ векторының координаттары:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

немесе

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k};$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} - \text{вектор ұзындығы.}$$

Егер $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \{a_x; a_y; a_z\}$, онда векторының ұзындығы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Егер $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ болса, онда $|\vec{e}| = 1$, $\vec{e}$ - бірлік вектор. $\vec{a} // \vec{e}$, $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{e}$ -

бағыттас векторлар.

$\vec{a}$ векторының координата өстерімен жасайтын бұрыштары α, β, γ болсын, яғни $\alpha = (\vec{a}, OX)$, $\beta = (\vec{a}, OY)$, $\gamma = (\vec{a}, OZ)$, онда $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ - $\vec{a}$ векторының бағыттаушы косинустары деп аталады:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

сонда

$$a_x = |\vec{a}| \cos \alpha; \quad a_y = |\vec{a}| \cos \beta; \quad a_z = |\vec{a}| \cos \gamma.$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad \text{теңдігі орындалады.}$$

Егер векторлар бір түзудің немесе параллель түзулердің бойында жатса, онда мұндай векторлар коллинеар векторлар деп аталады.

Коллинеар, бағыттас және модульдері бірдей векторларды тең векторлар дейді.

$\vec{a}$ векторына параллель, модулі тең, бірақ бағыты қарама-қарсы вектор қарама-қарсы бағытталған вектор деп аталады. $\vec{a}$ және $-\vec{a}$ -қарама-қарсы векторлар.

Параллель жазықтықтардың немесе бір жазықтықтың бойында жатқан векторларды компланар векторлар дейді.

2.1 мысал. $A(1;3;2)$, $B(5;8;-1)$ нүктелері берілген. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторының координаттарын табу керек.

Шешуі:

$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\} = \{5 - 1; 8 - 3; -1 - 2\} = \{4; 5; -3\}$$

немесе $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

2.2 мысал. $\vec{a} = \{3; -3; -4\}$ векторының модулін және бағыттаушы косинустарын табу керек.

Шешуі: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 9 + 16} = \sqrt{34}$;

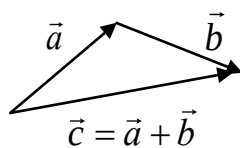
$$\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}; \quad \cos \beta = -\frac{3}{\sqrt{34}}; \quad \cos \gamma = -\frac{4}{\sqrt{34}}.$$

2.2 Векторларға сызықты амалдар қолдану

Коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары берілсін:

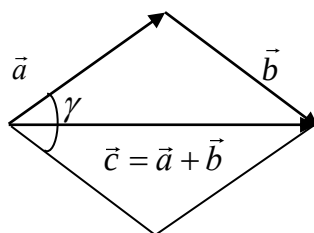
а) *векторларды қосу*. Берілген $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардың қосындысы деп бас нүктесі $\vec{a}$ векторының бас нүктесімен үйлесетін, ал соңғы нүктесі $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ векторын айтады.

Үшбұрыш ережесі.



2.2 сурет

Параллелограмм ережесі.



2.3 сурет

$\vec{c}$ векторының ұзындығын косинустар теоремасы:

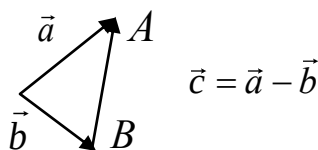
$$|\vec{c}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha},$$

ал оның бағыты синустар теоремасы:

$$\frac{|\vec{a}|}{\sin\alpha} = \frac{|\vec{b}|}{\sin\beta} = \frac{|\vec{c}|}{\sin\gamma}$$

бойынша аныкталады.

ә) *векторлардың айырымы*. $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының айырымы деп бастапқы нүктесі $\vec{b}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін, ал соңғы нүктесі $\vec{a}$ векторының соңғы нүктесімен үйлесетін $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ векторын айтады.



2.4 сурет

Векторлардың айырымын қосу амалын пайдаланып та табуға болады:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

б) *векторды санға көбейту*. Берілген $\vec{a}$ векторын скаляр λ санына көбейту деп мына үш шартты қанағаттандыратын $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ векторын айтады:

$$1) |\vec{b}| = |\lambda| |\vec{a}|;$$

2) $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар.

3) Егер $\lambda > 0$ болса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары бағыттас, ал $\lambda < 0$ болса, онда олардың бағыттары қарама-қарсы бағытталған болады.

Егер векторлар координаттарымен берілсе, яғни:

$$\vec{a} = \{a_x; a_y; a_z\} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = \{b_x; b_y; b_z\} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}.$$

Онда:

$$\vec{a} + \vec{b} = \{a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z\} = (a_x + b_x) \vec{i} + (a_y + b_y) \vec{j} + (a_z + b_z) \vec{k};$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\} = (a_x - b_x) \vec{i} + (a_y - b_y) \vec{j} + (a_z - b_z) \vec{k};$$

$$\lambda \vec{a} = \{\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z\} = (\lambda a_x) \vec{i} + (\lambda a_y) \vec{j} + (\lambda a_z) \vec{k}.$$

2.3 мысал. ABC үшбұрышында AB қабырғасы M және N нүктелерімен үш бірдей бөлікке бөлінген: $|AM| = |MN| = |NB|$. Егер $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ болса, онда $\overrightarrow{CM}$ -ын табу керек.

Шешуі: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ екені белгілі. Ендеше, $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$.

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} \text{ болғандықтан, } \overrightarrow{CM} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{a}).$$

2.3 Векторлардың скалярлық көбейтіндісі

Екі $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісі деп осы векторлардың ұзындықтары мен арасындағы φ бұрышының косинусының көбейтіндісіне тең санды айтады:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Егер } \vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad \vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k},$$

координаттарымен берілсе, онда:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Скалярлық көбейтіндінің кейбір қасиеттері:

а) орын ауыстырымдылық заңы: $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a});$

ә) терімділік заңы: $(\alpha \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \alpha \vec{b}) = \alpha (\vec{a}, \vec{b});$

б) үлестірімділік заңы: $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c});$

в) $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 > 0$, егер $\vec{a} \neq \vec{0}$ (скаляр квадрат деп аталады);

г) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ - болса, онда екі вектордың біреуі нөлдік вектор, немесе олардың арасындағы бұрыш – тік, яғни өзара перпендикуляр.

Скалярлық көбейтіндінің координаттық түрін пайдаланып, олардың арасындағы бұрыштың косинусын мына формула бойынша табамыз:

$$\cos \varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Скалярлық көбейтіндінің физикалық мағынасы: материалдық нүктені $\vec{F}$ күші әсерінен $\vec{S}$ жолға жылжыту кезіндегі істелетін жұмыс мөлшерін табайық. Ол үшін берілген $\vec{F}$ және $\vec{S}$ векторларының скаляр көбейтіндісін тапсақ жеткілікті:

$$(\vec{F}, \vec{S}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{S}| \cos \varphi,$$

мұндағы φ – $\vec{F}$ және $\vec{S}$ векторларының арасындағы бұрыш.

2.4 мысал. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$ және осы векторларының арасындағы

бұрышы $\varphi = \frac{\pi}{3}$ болса, онда $3\vec{a} - 2\vec{b}$ және $5\vec{a} - 6\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табу керек.

Шешуі:

$$\begin{aligned}(3\vec{a} - 2\vec{b})(5\vec{a} - 6\vec{b}) &= 15\vec{a}^2 - 18\vec{a} \cdot \vec{b} - 10\vec{b} \cdot \vec{a} + 12\vec{b}^2 = \\ &= 15|\vec{a}|^2 - 28\vec{a}\vec{b} + 12|\vec{b}|^2 = 15 \cdot 16 - 28 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 12 \cdot 36 = 336.\end{aligned}$$

2.5 мысал. $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$ және $\vec{b} = \{4; 5; -6\}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табу керек.

Шешуі:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 5 + 3 \cdot (-6) = 4 - 10 - 18 = -24.$$

2.6 мысал. $\vec{a} = m\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ және $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{j} - 7\vec{k}$ векторлары берілген. m -нің қандай мәнінде векторлар перпендикуляр болады?

Шешуі: осы векторлардың скаляр көбейтіндісін табайық:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4m + 3m - 28.$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ болғандықтан $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ болады.

Бұдан $7m - 28 = 0$, яғни $m = 4$.

2.7 мысал. $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ және $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$ векторларының арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 3(-2) = 8;$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14};$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{36 + 16 + 4} = 2\sqrt{14}.$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{14} \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{2}{7} \quad \text{немесе} \quad \varphi = \arccos \frac{2}{7}.$$

2.4 Векторлардың векторлық көбейтіндісі

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі деп $\vec{a} \times \vec{b}$ немесе $[\vec{a}, \vec{b}]$ белгіленетін және келесі шарттарды қанағаттандыратын $\vec{c}$ векторды айтады:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi, \quad \varphi = (\vec{a}, \vec{b})$

ә) $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ векторы $\vec{a}, \vec{b}$ векторлардың әрқайсысына перпендикуляр;

б) $\vec{c}$ векторы OX, OY өстері OZ өсіне қарағанда қалай бағытталса $\vec{a}, \vec{b}$ векторларына қарағанда солай бағытталған, яғни $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - оң үштік құрайды.

Векторлық көбейтіндінің қасиеттері:

$$a) |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \varphi = (\vec{a}, \vec{b});$$

$$ә) \vec{a} \times \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{b}, \vec{a} \times \vec{a} = 0;$$

$$б) \text{ векторлық көбейту қарсы коммутативті: } [\vec{b}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{b}];$$

$$в) \text{ терімділік заңы: } (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b});$$

г) үлестірімділік заңы:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c};$$

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}.$$

Егер $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ векторлары өз координаталарымен берілсе, онда $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

формуласымен есептелінеді.

Ортақ бір нүктеден шығатын коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісінің модулі:

$$S = |\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi, \varphi = (\vec{a}, \vec{b}).$$

$\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлардан құралған параллелограмм ауданын анықтайды.

Ортақ бір нүктеге үйлестірілген коллинеар емес $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторларынан құралған параллелограмм және үшбұрыш аудандары сәйкес:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2};$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}$$

формулаларымен табылады.

$$\text{Егер } \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = 0 \quad \text{немесе} \quad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \quad \text{теңдігі}$$

орындалса, онда $\vec{a}$ мен $\vec{b}$ векторлары коллинеар болады.

Физикалық тұрғыдан екі вектордың векторлық көбейтіндісі арқылы, A нүктесіне бекітілген дененің B нүктесіне әсер етуші $\vec{F}$ күші әсерінен туатын $\vec{M}(\vec{F})$ - айналу моментін есептеуге болатындығын атап өтуге болады - $\vec{M}(\vec{F}) = [\vec{AB}, \vec{F}]$.

2.8 мысал. $\vec{a} = \{1; -2; 3\}$ және $\vec{b} = \{4; 5; -6\}$ векторларының векторлық көбейтіндісін табу керек:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = -3 \cdot \vec{i} + 18 \cdot \vec{j} + 13 \cdot \vec{k}.$$

яғни

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3 \cdot \vec{i} + 18 \cdot \vec{j} + 13 \cdot \vec{k} = \{-3; 18; 13\}.$$

2.9 мысал. $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ және $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданын табу керек.

Шешуі:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k}.$$

Векторлық көбейтіндінің модулі ол векторлар арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданына тең болғандықтан:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{14^2 + 42^2 + 21^2} = 49 \text{ (кв. бірлік) болады.}$$

2.10 мысал. Төбелері $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(4;3;2)$ болатын үшбұрыш ауданын есептеу керек.

Шешуі: $\vec{AB}, \vec{AC}$ векторларын табайық:

$$\vec{AB} = (2-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (4-1)\vec{k} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k};$$

$$\vec{AC} = (4-1)\vec{i} + (3-1)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

$\triangle ABC$ -ның ауданы $\vec{AB}, \vec{AC}$ арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданының жартысына тең, сондықтан бұл векторлардың векторлық көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}.$$

Бұдан

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 64 + 16} = \frac{1}{2} \sqrt{96} = \sqrt{24} \text{ кв.бірлік.}$$

2.5 Векторлардың аралас көбейтіндісі

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісі деп $\vec{a} \times \vec{b}$ векторлық көбейтіндісін $\vec{c}$ векторына скаляр көбейткенде шығатын санды, яғни $(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})$ санын айтады және оны $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ немесе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ деп белгіленеді.

Аралас көбейтіндінің қасиеттері:

а) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ - егер көбейтіндідегі көршілес екі вектордың орнын алмастырсақ, онда сол аралас көбейтіндінің таңбасы қарама - қарсыға өзгереді;

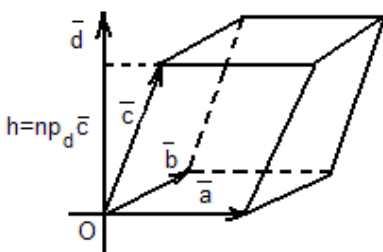
ә) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$ - егер аралас көбейтіндідегі векторлардың орнын толық алмастырсақ, аралас көбейтіндінің таңбасы өзгермейді;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар болса, онда $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = 0$ (үш вектордың компланарлық шарты).

Егер $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары координаттарымен $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$ берілсе, онда олардың аралас көбейтіндісі келесі формуламен есептелінеді:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Компланар емес $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулі осы векторлар арқылы тұрғызылған параллелепипед көлеміне тең болады, егер векторлар оң үштік құраса бұл көбейтінді “оң”, ал теріс үштік құраса «теріс» болады:



2.5 сурет

$$|(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})| = |\vec{d} \cdot \vec{c}| = |\vec{d}| \cdot n_{p_d} \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot n_{p_d} \vec{c} =$$

$$= \left| \begin{matrix} \vec{d} = \vec{a} \times \vec{b} \\ |\vec{a} \times \vec{b}| = S \end{matrix} \right| = S \cdot h = V.$$

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c})|, \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{оң үштік құрайды.}$$

Бір нүктеге үйлестірілген компланар емес $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісінің модулінің $\frac{1}{6}$ бөлігі осы векторлар арқылы тұрғызылған пирамида көлеміне тең болады.

Өз координаталарымен берілген $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар болуы үшін мына теңдіктің:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

2.12 мысал. $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = 7\vec{i} + 8\vec{j} + 9\vec{k}$ векторларының аралас көбейтіндісін табу керек.

Шешуі:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 5 & -4 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 56 + 144 - 105 + 108 + 32 = 280.$$

2.13 мысал. $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 7\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, векторлары компланар екенін дәлелдеу керек.

Шешуі: векторлардың аралас көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 5 + 14 - 7 - 10 + 4 = 0.$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} = 0$ болғандықтан, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары компланар.

2.14 мысал. $A(5; 7; -2)$, $B(3; 1; -1)$, $C(9; 4; -4)$, $D(1; 5; 0)$ нүктелері бір жазықтықта жататындығын дәлелдеу керек.

Шешуі:

$$\overrightarrow{AB} = -2\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}, \quad \overrightarrow{AC} = 4\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}, \quad \overrightarrow{AD} = -4\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

векторларын табамыз. Осы векторларының аралас көбейтіндісін табамыз:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 48 - 8 - 12 + 48 + 8 = 0,$$

онда $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ векторлары компланар, сондықтан, A, B, C, D нүктелері бір жазықтықта жатады.

2.15 мысал. $A(2; 2; 2)$, $B(4; 3; 3)$, $C(4; 5; 4)$, $D(5; 5; 6)$ – төбелері болатын үшбұрышты пирамида көлемін табу керек.

Шешуі: пирамида қырлары болатын A төбесінен шығатын $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ векторларын табамыз:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}; \quad \overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Олардың аралас көбейтіндісі:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 6 + 6 - 9 - 8 - 12 = 36 - 29 = 7.$$

Пирамида көлемі параллелепипед көлемінің $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең болғандықтан, $V = \frac{1}{6} \cdot 7 = \frac{7}{6}$ (куб бірлік).

2.6 Векторлардың сызықты тәуелділігі

Берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы деп $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_m \vec{a}_m$ өрнегін айтады, мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ - кез келген нақты сандар.

Берілген $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторлары үшін кемінде біреуі нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ сандары табылып, олардың сызықты комбинациясы нөлге тең болса, онда бұл векторлар сызықты тәуелді деп, қарсы жағдайда сызықты тәуелсіз деп аталады.

Егер $\vec{b}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторларының сызықты комбинациясы арқылы өрнектелсе, онда $\vec{b}$ векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторлары арқылы жіктелінеді дейді.

Егер $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторларының бірі қалған векторлар арқылы жіктелсе, онда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ векторлары сызықты тәуелді векторлар деп аталады.

Түзу бойындағы базис деп осы түзу бойындағы кез келген нөл емес векторды айтады.

Жазықтықтағы базис деп осы жазықтықтың кез келген коллинеар емес екі векторын айтады. Жазықтықтағы кез келген $\vec{c}$ векторы үшін α мен β нақты сандары табылып, $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$ теңдігі орындалса, онда $\vec{c}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}$ базисінде жіктелінген деп аталады.

Кеңістікте компланар емес (сызықты тәуелсіз) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары базис құрайды. Кез келген $\vec{d}$ векторы осы векторлардың сызықты комбинациясы болса, яғни α, β, γ нақты сандары табылып, $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ теңдігі орындалса, онда $\vec{d}$ векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базисінде жіктеледі дейді.

2.16 мысал. Төрт $\vec{a} = \{2; 4; -6\}$, $\vec{b} = \{1; 3; 5\}$, $\vec{c} = \{0; -3; 7\}$, $\vec{d} = \{3; 2; 52\}$ векторлары берілген. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ үш векторы базис құратындығын көрсету керек және осы базисте $\vec{d}$ векторын жіктеп, координаталарын табу керек.

Шешуі: егер үш вектордың аралас көбейтіндісі нөлге тең болмаса, яғни $\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, олар базис құрайды:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 62 \neq 0,$$

сондықтан үш $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлары базис құрады.

Осы базисте $\vec{d}$ векторы $\vec{d} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ түрінде жіктеледі. Бұл векторлық түрдегі өрнекті матрицалық түрде былай жазамыз:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 52 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta = 3 \\ 4\alpha + 3\beta - 3\gamma = 2 \\ -6\alpha + 5\beta + 7\gamma = 52. \end{cases}$$

Осы жүйенің шешімі $\alpha = -1$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$. Сондықтан $\vec{d}$ векторының $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ базисіндегі координаталары $\{-1; 5; 3\}$, яғни $\vec{d} = -\vec{a} + 5\vec{b} + 3\vec{c}$.

Жаттығулар.

1. $M_1 = (-2; -4; 3)$, $M_2 = (4; 3; -3)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{M_1 M_2}$ векторының ұзындығын және бағытын табу керек.

Жауабы: $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = 11$; $\cos \alpha = \frac{6}{11}$; $\cos \beta = \frac{7}{11}$; $\cos \gamma = -\frac{6}{11}$.

2. $M_1 = (1; 2; 4)$, $M_2 = (3; -2; 8)$ нүктелері берілген. $\overrightarrow{M_1 M_2}$ векторының ұзындығын және бағытын табу керек.

Жауабы: $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = 6$; $\cos \alpha = \frac{1}{3}$; $\cos \beta = -\frac{2}{3}$; $\cos \gamma = \frac{2}{3}$.

3. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ және осы векторларының арасындағы бұрышы $\phi = \frac{\pi}{6}$ болса, онда $\vec{a} + 3\vec{b}$ және $5\vec{a} - 2\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табу керек.

Жауабы: $21 + 39\sqrt{3}$.

4. $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 4$ және осы векторларының арасындағы бұрышы $\phi = \frac{\pi}{3}$

болса, онда $\vec{a} + 2\vec{b}$ және $2\vec{a} - \vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін табу керек.

Жауабы: 108.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген. Олардың скалярлық көбейтіндісін табу керек.

5. $\vec{a} = \{2; 5; -7\}$; $\vec{b} = \{1; 1; -1\}$.

Жауабы: 14.

6. $\vec{a} = \{3; -5; 2\}$; $\vec{b} = \{4; 5; -7\}$.

Жауабы: -27 .

7. $\vec{a} = \{7; -3; 2\}$; $\vec{b} = \{3; 7; 8\}$.

Жауабы: 16.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген. m - нің қандай мәнінде векторлар перпендикуляр болады?

8. $\vec{a} = \{m; -2; 2\}$; $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$.

Жауабы: $m = 6$.

9. $\vec{a} = \{5; m; 6\}$; $\vec{b} = \{2m; -4; 3\}$.

Жауабы: $m = -3$.

10. $\vec{a} = \{-2; 4; m\}$; $\vec{b} = \{3; m; -1\}$.

Жауабы: $m = 2$.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген. Олардың арасындағы бұрышты табу керек.

11. $\vec{a} = \{2; -4; 4\}$; $\vec{b} = \{-3; 2; 6\}$.

Жауабы: $\arccos \frac{5}{21}$.

12. $\vec{a} = \{3; 4; 5\}$; $\vec{b} = \{4; 5; -3\}$.

Жауабы: $\arccos \frac{17}{50}$.

13. $\vec{a} = \{1; 2; -2\}$; $\vec{b} = \{6; 7; 6\}$.

Жауабы: $\arccos \frac{8}{33}$.

$\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторлары берілген. Олардың векторлық көбейтіндісін табу керек.

14. $\vec{a} = \{3; -1; 2\}$; $\vec{b} = \{1; 2; 1\}$.

Жауабы: $\{-5; -1; 7\}$.

15. $\vec{a} = \{3; 2; 2\}$; $\vec{b} = \{1; 3; 1\}$.

Жауабы: $\{-4; -1; 7\}$.

16. $\vec{a} = \{1; 3; -3\}$; $\vec{b} = \{4; 5; 1\}$.

Жауабы: $\{18; -13; -7\}$.

17. $\vec{a} = \{2; -2; -3\}$, $\vec{b} = \{2; 2; 9\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданын табу керек.

Жауабы: $S = 28$.

18. $\vec{a} = \{4; -5; 0\}$, $\vec{b} = \{4; -9; 3\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданын табу керек.

Жауабы: $S = 25$.

19. Төбелері $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$ болатын үшбұрыш ауданын есептеу керек.

Жауабы: $S = 14$.

20. Төбелері $A(2;-1;2)$, $B(1;2;-1)$, $C(3;2;1)$ болатын үшбұрыш ауданын есептеу керек.

Жауабы: $S = \sqrt{22}$.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлары берілген. Олардың аралас көбейтіндісін табу керек.

21. $\vec{a} = \{2; 1; 3\}$; $\vec{b} = \{3; -2; 1\}$; $\vec{c} = \{1; -3; -4\}$. Жауабы: 14.

22. $\vec{a} = \{3; 1; 4\}$; $\vec{b} = \{-4; 2; 3\}$; $\vec{c} = \{2; -1; -2\}$. Жауабы: -5.

23. $\vec{a} = \{2; 1; 5\}$; $\vec{b} = \{-4; 3; 5\}$; $\vec{c} = \{-1; 1; 4\}$. Жауабы: 20.

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ - төбелері болатын ABCD тетраэдрдің көлемін табу керек.

24. $A(1, -2, 3)$, $B(4, 1, 6)$, $C(3, 2, -3)$, $D(6, -2, 7)$. Жауабы: 21.

25. $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$. Жауабы: 3.

26. $A(3, 1, 1)$, $B(3, 3, 5)$, $C(4, 4, -3)$, $D(5, -2, -1)$. Жауабы: 8.

Төрт $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторлары берілген. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ үш векторы базис құрастындығын көрсетіп, $\vec{d}$ векторын осы базистегі координаттарын табу керек.

27. $\vec{a} = \{1; 4; 2\}$; $\vec{b} = \{5; -2; -3\}$; $\vec{c} = \{-2; -1; 1\}$; $\vec{d} = \{9; -2; -1\}$.

Жауабы: $\vec{d} = 2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$.

28. $\vec{a} = \{3; 1; 6\}$; $\vec{b} = \{-2; 2; -3\}$; $\vec{c} = \{-4; 5; -1\}$; $\vec{d} = \{-2; 24; 33\}$.

Жауабы: $\vec{d} = 4\vec{a} - 5\vec{b} + 6\vec{c}$.

29. $\vec{a} = \{1; 2; 5\}$; $\vec{b} = \{2; -3; 4\}$; $\vec{c} = \{1; -1; -2\}$; $\vec{d} = \{-4; 9; -1\}$.

Жауабы: $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$.

30. $\vec{a} = \{5; 1; 2\}$; $\vec{b} = \{3; 4; -1\}$; $\vec{c} = \{-4; 2; 1\}$; $\vec{d} = \{-2; -5; 11\}$.

Жауабы: $\vec{d} = 3\vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c}$.

Векторлық алгебра элементтері тақырыбына арналған есептеу-сызбалық жұмыстар.

$A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ нүктелерінің координаталары берілген:

а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ және $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ - векторларының ұзындықтарын;

ә) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін;

б) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы бұрышты;

в) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін;

г) ABC үшбұрышының ауданын;

ғ) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін;

д) $ABCD$ -тетраэдрдің көлемін табу керек.

1	$A(-4;6;3), B(-5;-2;6),$ $C(4;-4;-3), D(0;0;0)$	16	$A(-4;4;4), B(-3;-3;1),$ $C(1;1;1), D(-2;-3;-4)$
2	$A(-4;3;-2), B(-3;1;4),$ $C(2;-2;1), D(4;-4;-4)$	17	$A(0;0;0), B(3;3;3),$ $C(-1;-3;-4), D(5;-4;5)$
3	$A(-2;-2;4), B(4;3;-2),$ $C(-1;4;2), D(5;5;5)$	18	$A(1;-2;3), B(3;2;-1),$ $C(4;-1;-3), D(-5;4;-3)$
4	$A(-2;4;3), B(3;-1;-4),$ $C(-1;2;2), D(-3;-3;-3)$	19	$A(0;-2;3), B(4;-2;0),$ $C(5;4;-2), D(-4;4;4)$
5	$A(1;1;1), B(3;2;1),$ $C(3;2;1), D(-2;-2;-2)$	20	$A(-1;-3;-4), B(3;2;1),$ $C(-4;2;3), D(0;0;0)$
6	$A(1;2;3), B(3;-1;-1),$ $C(-2;-1;1), D(6;7;-1)$	21	$A(0;-5;-4), B(5;5;5),$ $C(-3;0;1), D(3;-1;3)$
7	$A(3;2;4), B(5;-3;-1),$ $C(3;-2;1), D(6;-3;0)$	22	$A(5;-4;3), B(0;-1;-4),$ $C(-5;-4;-1), D(3;3;3)$
8	$A(0;-1;1), B(1;0;1),$ $C(3;0;1), D(3;-3;3)$	23	$A(-2;-2;2), B(2;2;2),$ $C(0;0;0), D(5;-5;5)$
9	$A(-3;1;-1), B(2;-1;1),$ $C(0;1;2), D(4;3;2)$	24	$A(4;-3;2), B(3;-1;-4),$ $C(-2;2;-1), D(-4;4;4)$
10	$A(2;3;4), B(4;3;1),$ $C(4;3;2), D(0;0;0)$	25	$A(4;3;2), B(0;0;-4),$ $C(4;-3;-2), D(-1;-2;3)$
11	$A(-4;3;-2), B(3;2;-1),$ $C(2;2;2), D(4;4;4)$	26	$A(-1;-2;0), B(3;2;3),$ $C(4;0;4), D(5;-5;-5)$
12	$A(0;4;-4), B(8;3;-2),$ $C(-4;0;4), D(-2;-2;-3)$	27	$A(0;0;0), B(5;5;5),$ $C(-3;-2;-1), D(2;-3;-3)$
13	$A(5;-1;-2), B(7;2;4),$ $C(3;3;3), D(-6;1;2)$	28	$A(5;-3;-1), B(-3;-2;-4),$ $C(0;0;0), D(-3;-3;3)$
14	$A(-3;4;-5), B(6;3;-1),$ $C(5;3;3), D(3;-4;-4)$	29	$A(2;3;4), B(0;-5;-5),$ $C(4;4;4), D(-3;-3;3)$
15	$A(2;2;-2), B(5;4;3),$ $C(4;4;4), D(0;-1;1)$	30	$A(0;4;4), B(7;6;5),$ $C(3;-3;4), D(-1;0;1)$

Тапсырмаларды шығару жолы.

$A(-1;0;1), B(0;4;4), C(7;6;5)$ және $D(3;-3;4)$ - нүктелерінің координаталары берілген.

а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ және $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ - векторларының ұзындықтарын;

ә) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының скалярлық көбейтіндісін;

б) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторының арасындағы бұрышты;

в) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының векторлық көбейтіндісін;

г) ABC үшбұрышының ауданын;

ғ) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін;

д) $ABCD$ -тетраэдрдің көлемін табу керек.

Шешуі:

а) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ және $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ - векторларының ұзындықтарын табамыз:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \{0 - (-1); 4 - 0; 4 - 1\} = \{1, 4, 3\};$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \{7 - (-1); 6 - 0; 5 - 1\} = \{8, 6, 4\};$$

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{26};$$

$$|\vec{b}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29};$$

ә) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының $\vec{a} \cdot \vec{b}$ скалярлық көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 1 \cdot 8 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 8 + 24 + 12 = 44;$$

б) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының арасындағы α -бұрышын анықтаймыз:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha \quad \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{44}{\sqrt{26} \cdot 2\sqrt{29}} = \frac{22}{\sqrt{754}}; \quad \alpha = \arccos \frac{22}{\sqrt{754}};$$

в) $\vec{a}$ және $\vec{b}$ векторларының $\vec{a} \times \vec{b}$ векторлық көбейтіндісін табамыз:

$$\begin{aligned} \vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} \right\} = \{-2; 20; -26\}; \end{aligned}$$

г) ΔABC үшбұрышының ауданын табамыз:

$$S = \frac{1}{2} |[\vec{a} \times \vec{b}]| = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 20^2 + (-26)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1080} = 3\sqrt{30};$$

ғ) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторларының аралас көбейтіндісін табамыз, мұндағы:

$$\vec{a} = \{1, 4, 3\}; \quad \vec{b} = \{8, 6, 4\}; \quad \vec{c} = \overrightarrow{AD} = \{3 - (-1); (-3) - 0; 4 - 1\} = \{4; -3; 3\};$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 8 & 6 & 4 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \cdot (-3) - \\ - 3 \cdot 6 \cdot 4 - 4 \cdot 8 \cdot 3 - 1 \cdot 4 \cdot (-3) = 18 + 64 - 72 - 72 - 96 + 12 = -146;$$

д) $ABCD$ - тетраэдрдің көлемін табамыз. Ол үшін үш вектордың аралас көбейтіндісін пайдаланамыз:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot |-146| = \frac{73}{3} \text{ куб бірлік.}$$

Бақылау сұрақтары.

1. Векторлық және скаляр шамалар дегеніміз не?
2. Вектордың модулі қалай есептелінеді?
3. Бірлік вектор қалай анықталады?
4. Векторларға сызықты амалдар қолдану.
5. Екі вектордың скаляр көбейтіндісі дегеніміз не және оның қандай қасиеттері бар?
6. Екі вектордың векторлық көбейтіндісі дегеніміз не және оның қандай қасиеттері бар?
7. Үш вектордың аралас көбейтіндісі дегеніміз не және оның қандай қасиеттері бар?
8. Векторлардың коллинеарлық шарты.
9. Векторлардың компланарлық шарты.
10. Вектордың геометрияда, физикада қолданылуы.

3 Аналитикалық геометрия элементтері

3.1 Жазықтықтағы аналитикалық геометрия

3.1.1 Аналитикалық геометрия есептері.

1. *Нүктелердің ара қашықтығы.* Егер жазықтықта тік бұрышты OXY координаттар жүйесі берілсе, онда осы жазықтықтың $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы d келесі формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. *Кесіндіні берілген қатынаста бөлу.* $M_1(x_1, y_1)$ және $M_2(x_2, y_2)$ нүктелерінің арасындағы кесіндіні берілген λ қатынаста бөлетін $M(x, y)$ нүктесінің координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Дербес жағдайда, $\lambda = 1$ болғанда кесінді ортасының координаталары:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. *Үшбұрыштың ауданы.* Төбелері $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ нүктелері болатын $\Delta M_1 M_2 M_3$ үшбұрышының ауданы келесі формуламен анықталады:

$$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}.$$

3.1 мысал. $M_1(-3; 2)$, $M_2(3; 6)$ нүктелерінің координаталары берілген:

1) $M_1 M_2$ қабырғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі:

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 + 3)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

2) $M_1 M_2$ қабырғасының бойынан M_1 -ге дейінгі қашықтығы M_2 -ге дейінгі қашықтығынан 2 есе үлкен болатын M нүктесінің координаталарын табу керек.

Шешуі:

$$\frac{|M_1 D|}{|D M_2|} = \lambda = 2;$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{-3 + 2 \cdot 3}{1 + 2} = 1; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 4\frac{2}{3}; \quad M(1; 4\frac{2}{3}).$$

3.2 мысал. $\Delta M_1 M_2 M_3$ төбелері: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$.

Үшбұрыш медианаларының қиылысу нүктесінің координаталарын табу керек.

Шешуі: D - $M_1 M_2$ кесіндісінің ортасының координаталары:

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_D = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

M - медианалардың қиылысу нүктесі, ол $M_3 D$ кесіндісін M_3 -тен бастап есептегенде 2:1 қатынаста бөледі:

$$x_M = \frac{x_3 + 2x_D}{1 + 2}; \quad y_M = \frac{y_3 + 2y_D}{1 + 2},$$

яғни

$$x_M = \frac{x_3 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}}{3}; y_M = \frac{y_3 + 2 \cdot \frac{y_1 + y_2}{2}}{3}.$$

Осыдан

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

3.3 мысал. $M_1 M_2 M_3$ - үшбұрышының $M_1(-3; 2)$, $M_2(3; 6)$, $M_3(5; -4)$ төбелерінің координаталары берілген. $M_1 M_2 M_3$ үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі:

$$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 3+3 & 6-2 \\ 5+3 & -4-2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-36 - 32) = -34;$$

$$S = 34 (\text{кв. бірлік}).$$

3.1.2 Жазықтықтағы түзу теңдеулері.

1. Түзудің жалпы теңдеуі. Жазықтықта бірінші ретті екі айнымалы x, y арқылы анықталған кез келген теңдеу түзу сызықты (l) анықтайды және керісінше, кез келген түзу бірінші ретті теңдеумен анықталады:

$$Ax + By + C = 0$$

теңдеуі (мұндағы A, B, C – тұрақты коэффициенттер, әрі $A^2 + B^2 \neq 0$) жазықтықта түзуді анықтайды. Бұл теңдеу түзудің жалпы теңдеуі деп аталады. Координаталары A, B коэффициенттері болатын вектор $\vec{n} = \{A, B\} \perp l$ болады.

Дербес жағдайлары.

1) $A \neq 0, B \neq 0, C = 0$ болғанда $Ax + By = 0$ теңдеуімен анықталған түзу координаттар бас нүктесі арқылы өтеді.

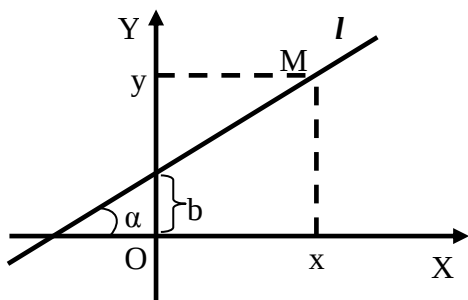
2) $A = 0, B \neq 0, C \neq 0$ болғанда $By + C = 0$ немесе $y = -\frac{C}{B}$ теңдеуімен анықталған түзу OY өсіне параллель болады.

3) $A \neq 0, B = 0, C \neq 0$ болғанда $Ax + C = 0$ немесе $x = -\frac{C}{A}$ теңдеуімен анықталған түзу OX өсіне параллель болады.

4) $A \neq 0, B = C = 0$ болғанда $Ax = 0$ немесе $x = 0$ теңдеуімен анықталған түзу OY өсімен беттеседі немесе OY өсінің теңдеуі дейді.

5) $A = C = 0, B \neq 0$ болғанда $By = 0$ немесе $y = 0$ теңдеуімен анықталған түзу OX өсімен беттеседі немесе OX өсінің теңдеуі дейді.

2. *Бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған түзудің теңдеуі.* Егер түзудің жалпы теңдеуінде $B \neq 0$ болса, оны y арқылы шешсек, онда $y = kx + b$ түріндегі теңдеу аламыз.



3.1 сурет

Бұл түзудің бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуі деп аталады, мұндағы $k = -\frac{A}{B} = \operatorname{tg} \alpha$ - түзудің бұрыштық коэффициенті, ал $b = -\frac{C}{B}$ түзудің OY өсінен қиып өтетін кесіндісі, x, y - түзу бойындағы айнымалы M нүктесінің координаталары.

3. *Түзудің «кесінді» түріндегі теңдеуі.* Егер түзудің жалпы теңдеуінде $C \neq 0$ болса, оның барлық мүшелерін $-C$ -ға бөлсек, онда:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

түріндегі теңдеу аламыз. Бұл түзудің «кесінді» түріндегі теңдеуі деп аталады, мұндағы $a = -\frac{C}{A}$ - түзудің OX өсінен, ал $b = -\frac{C}{B}$ - түзудің OY өсінен қиып өтетін кесінділері. Сондықтан a мен b координат өстеріндегі кесінділер делінеді.

4. *Берілген бұрыштық коэффициенті және берілген нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі.* $y = kx + b$, $y_1 = kx_1 + b$. Осыдан $k = \frac{y - y_1}{x - x_1} = \operatorname{tg} \alpha$

шығады, онда $y - y_1 = k(x - x_1)$ аламыз. Бұл - $M_1(x_1, y_1)$ нүктесі арқылы өтетін, бұрыштық коэффициенті k болатын түзу теңдеуі.

5. *Екі нүкте арқылы өтетін түзу теңдеуі.* $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ нүктелері берілсін. $y - y_1 = k(x - x_1)$, $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Осыдан k -ның мәні $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, онда M_1, M_2 нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуін:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

аламыз.

6. *Екі түзу арасындағы бұрыш.* Бізге $l_1: y = k_1x + b_1$ және $l_2: y = k_2x + b_2$ 2 түзулері берілсін:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|$$

екі түзу арасындағы бұрыш тангенсін есептейтін формула.

Егер $l_1 // l_2$ болса, онда $\varphi = 0$, яғни $k_1 = k_2$ - түзулердің параллельдік шарты.

Егер $l_1 \perp l_2$ болса, онда $\varphi = \frac{\pi}{2}$, яғни $1 + k_1 k_2 = 0 \Rightarrow k_2 = -\frac{1}{k_1}$ -

түзулердің перпендикулярлық шарты.

Егер түзулер теңдеулері жалпы түрде берілсе, яғни:

$$l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0;$$

$$l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

1) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ болса, онда $l_1 // l_2$, яғни түзулер параллель болады.

2) $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$ болса, онда $l_1 \cap l_2$, яғни түзулер қиылысады.

3) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ болса, онда $l_1 \equiv l_2$, яғни түзулер беттеседі.

4) $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$ болса, онда $l_1 \perp l_2$ яғни түзулер перпендикуляр болады.

7. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық. $M_0(x_0, y_0)$ нүктеден түзуге дейінгі қашықтық мына формуламен есептелінеді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3.4 мысал. $M_1 M_2 M_3$ - үшбұрышының $M_1(-3; 2)$, $M_2(3; 6)$, $M_3(5; -4)$ төбелерінің координаталары берілген. Табу керек:

1) $M_1 M_2$ қабырғасының теңдеуін (жалпы теңдеуін, бұрыштық коэффициенті арқылы жазылған теңдеуін, «кесінді» түріндегі теңдеуін).

Шешуі: екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуінің:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

формуласын пайдаланамыз. Онда:

$$\frac{x + 3}{3 + 3} = \frac{y - 2}{6 - 2}; \quad 2(x + 3) = 3(y - 2); \quad 2x + 6 = 3y - 6; \quad 3y - 2x - 12 = 0.$$

Сонымен $3y - 2x - 12 = 0$ - $M_1 M_2$ түзуінің жалпы теңдеуі.

$$3y = 2x + 12 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + 4 - M_1M_2 \text{ түзуінің бұрыштық коэффициенті}$$

арқылы жазылған теңдеуі. AB түзуінің бұрыштық коэффициенті: $k_{12} = \frac{2}{3}$.

$$3y - 2x = 12 \Rightarrow -\frac{2x}{12} + \frac{3y}{12} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-6} + \frac{y}{4} = 1 - \text{түзуінің «кесінді»}$$

түріндегі теңдеуі.

2) M_1M_2 және M_1M_3 қабырғаларының арасындағы бұрышын.

Шешуі: $k_{12} = \frac{2}{3}$. Енді M_1M_3 қабырғаларының теңдеуін табамыз:

$$\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-2}{-4-2}; \quad -3(x+3) = 4(y-2); \quad -3x-9 = 4y-8; \quad 3x+4y+1=0.$$

$y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} - M_1M_3$ түзуінің теңдеуі, оның бұрыштық коэффициенті

$k_{13} = -\frac{3}{4}$. Енді $\angle M_2M_1M_3 = \alpha$ бұрышын табу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_{12} - k_{13}}{1 + k_{12} \cdot k_{13}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}} = \frac{\frac{17}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{17}{6}; \quad \alpha = \arctg \frac{17}{6}.$$

3) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына параллель болатын түзудің теңдеуін.

Шешуі: алдымен M_2M_3 қабырғаларының теңдеуін табамыз:

$$\frac{x-3}{5-3} = \frac{y-6}{-4-6}; \quad -5(x-3) = y-6; \quad y+5x+21=0.$$

$y = -5x + 21 - M_2M_3$ түзуінің теңдеуі, онда $k_{23} = -5$. Олай болса, M_1 нүктесі арқылы өтетін және осы түзуге параллель болатын түзудің теңдеуі $y - y_1 = -5(x - x_1)$; $y - 2 = -5(x + 3) \Rightarrow y = -5x - 13$ болады.

4) M_1 нүктесі арқылы өтетін және M_2M_3 қабырғасына перпендикуляр болатын түзудің (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктіктің) теңдеуін.

Шешуі: $k_{23} = -5 - M_2M_3$ түзуінің бұрыштық коэффициенті, олай болса, M_1 нүктесі арқылы өтетін және осы түзуге перпендикуляр болатын

түзудің бұрыштық коэффициенті $k_1 = -\frac{1}{k_{23}} = \frac{1}{5}$, онда оның теңдеуі $y - y_1 = \frac{1}{5}(x - x_1)$; $y - 2 = \frac{1}{5}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$ болады.

5) M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына түсірілген биіктіктің ұзындығын (яғни M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына дейінгі ара қашықтық).

Шешуі: $5x + y - 21 = 0$ – M_2M_3 түзуінің жалпы теңдеуі. Олай болса, нүктеден түзуге дейінгі қашықтықтың $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ формуласын қолданамыз:

$$h_1 = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{5 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 - 21}{\sqrt{25 + 1}} \right| = \left| \frac{-15 + 2 - 21}{\sqrt{26}} \right| = \frac{17\sqrt{26}}{13}.$$

6) M_1 нүктесінен жүргізілген медиананың теңдеуін.

Шешуі: M_1 нүктесінен M_2M_3 қабырғасына жүргізілген медиананың теңдеуін жазамыз. Алдымен M_2M_3 қабырғасынаның ортасы E нүктесі деп алып, оның координатасын табамыз, ол үшін кесіндінің ортасының координаталарын табу формуласын пайдаланамыз:

$$x_E = \frac{x_2 + x_3}{2} = \frac{3 + 5}{2} = 4; \quad y_E = \frac{y_2 + y_3}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1; \quad E = (4; 1).$$

Енді медиана M_1E теңдеуін екі нүкте арқылы өтетін түзудің формуласын пайдаланып жазамыз:

$$\frac{x - x_1}{x_E - x_1} = \frac{y - y_1}{y_E - y_1}; \quad \frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y - 2}{1 - 2}; \quad -x - 3 = 7y - 14; \quad x + 7y - 11 = 0.$$

7) M_1 нүктесінен жүргізілген медиананың ұзындығын.

Шешуі:

$$|M_1E| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 + 3)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

3.1.3 Екінші ретті қисықтар.

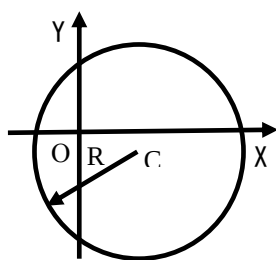
Декарттық координат жүйесінде екінші ретті қисықтар жалпы теңдеуімен беріледі:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

мұндағы A, B, C - бірдей нөлге тең емес сандар.

Жазықтықта екінші ретті теңдеумен өрнектелетін қисықтар: шеңбер, эллипс, гипербола, парабола.

1. *Шеңбер.* Центр деп аталатын $C(\alpha, \beta)$ нүктесінен бірдей қашықтықта орналасқан нүктелердің геометриялық орнын шеңбер дейді.

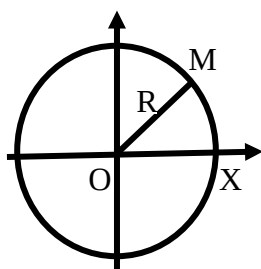


3.2 сурет

$C(\alpha, \beta)$ -центрі, R – радиусы.

Шеңбердің канондық теңдеуі:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2.$$



3.3 сурет

$O(0,0)$ -центрі, R – радиусы

Шеңбердің канондық теңдеуі

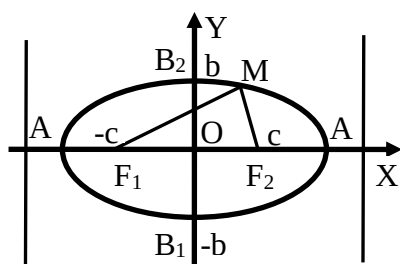
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

2. *Эллипс*. Фокус деп аталатын жазықтықтың $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ екі нүктесінен ара қашықтықтарының қосындысы тұрақты $2a$ санына тең болатын нүктелердің геометриялық орнын эллипс дейді. Эллипстің канондық теңдеуі:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

а) жарты өстері $a > b$ болатын эллипс (a - үлкен, b - кіші жарты өстер, 3.4 сурет);

б) жарты өстері $a < b$ болатын эллипс (a - кіші жарты өс, b - үлкен жарты өс, 3.5 сурет).



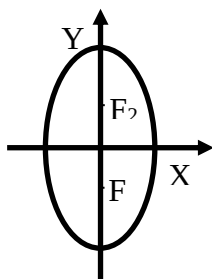
3.4 сурет

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

$$F_1M + F_2M = 2a, \quad 2a > 2c \Rightarrow a > c.$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \text{ - эксцентриситет, } \varepsilon < 1.$$

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} \text{ - директриса.}$$



3.5 сурет

$$a = \sqrt{b^2 - c^2}$$

$$F_1M + F_2M = 2b, \quad 2b > 2c \Rightarrow b > c.$$

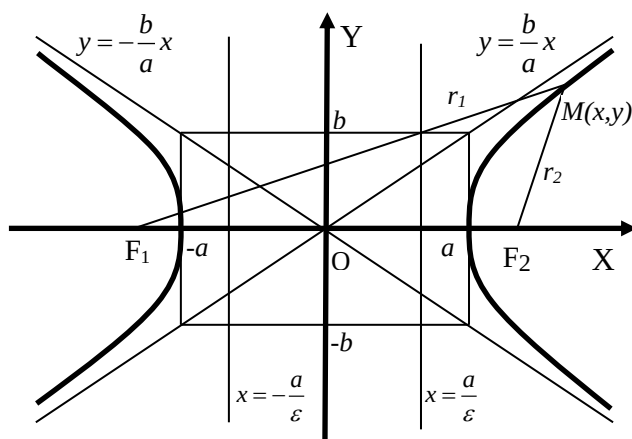
$$\varepsilon = \frac{c}{b} \text{ - эксцентриситет, } \varepsilon < 1.$$

$$y = \pm \frac{b}{\varepsilon} \text{ - директриса.}$$

3. *Гипербола*. Фокус деп аталатын жазықтықтың $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ екі нүктесінен ара қашықтықтарының айырымы тұрақты $2a$ санына тең болатын нүктелердің геометриялық орнын гипербола дейді:

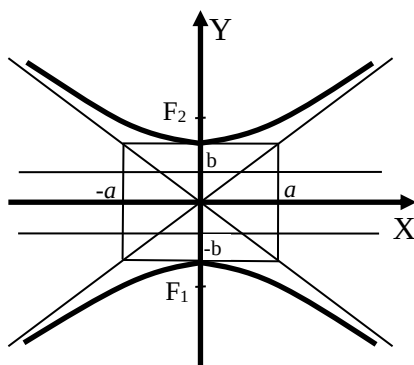
a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad F_1, F_2 \in OX, \quad a, b$ - жарты өстері (3.6 сурет);

ә) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad F_1, F_2 \in OY, \quad F_1(0,-c), F_2(0,c)$ (3.7 сурет).



3.6 сурет

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ - эксцентриситет, $\varepsilon > 1, b = \sqrt{c^2 - a^2}, y = \pm \frac{b}{a}x$ - асимптоталары.



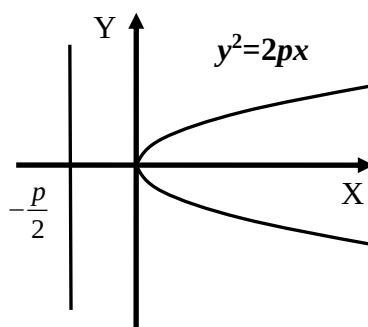
3.7 сурет

$\varepsilon = \frac{c}{b}$ - эксцентриситет, $\varepsilon > 1, b = \sqrt{c^2 - a^2}, y = \pm \frac{b}{a}x$ - асимптоталары.

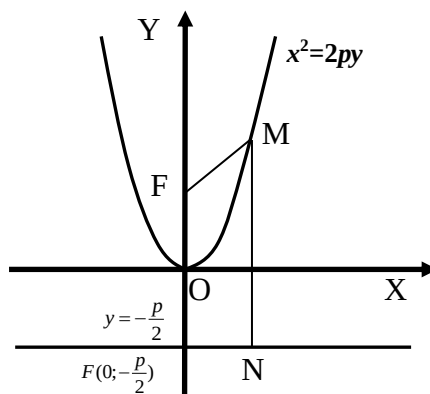
4. *Парабола*. Фокус деп аталатын нүкте мен директриса деп аталатын түзуге дейінгі ара қашықтықтары тең болатын нүктелердің геометриялық орнын парабола дейді.

a) $y^2 = 2px$, $x = -\frac{p}{2}$ - директриса (3.8 сурет);

b) $x^2 = 2py$, $y = -\frac{p}{2}$ - директриса (3.9 сурет).



3.8 сурет



3.9 сурет

3.5 мысал. $2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: берілген теңдеуге келесі түрлендірулер қолданайық. Теңдеуді 2-ге қысқартып, теңдеу мүшелерін топтаймыз:

$$x^2 - 4x + y^2 + 2,5y = 2.$$

Енді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$(x^2 - 4x + 4) + \left(y^2 + 2,5y + \frac{25}{16}\right) = 2 + 4 + \frac{25}{16}; \quad (x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{4}\right)^2 = \frac{121}{16}.$$

Бұл центрі $\left(2; -\frac{5}{4}\right)$, радиусы $R = \frac{11}{4}$ болатын шеңбердің теңдеуі.

3.6 мысал. $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y - 44 = 0$ теңдеуі қандай қисықты анықтайды?

Шешуі: теңдеу мүшелерін топтастырып, келесі түрлендірулер жасайық:

$$(x^2 + 2x) - 9(y^2 - 4y) = 44;$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 9(y^2 - 4y + 4) = 44 + 1 - 36;$$

$$(x+1)^2 - 9(y-2)^2 = 9;$$

$$\frac{(x+1)^2}{9} - (y-2)^2 = 1.$$

Бұл гиперболаның теңдеуі.

3.7 мысал. $M\left(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ және $N\left(-2; \frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ нүктелері арқылы өтетін

эллипстің теңдеуін жазу керек.

Шешуі: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - ізделінді эллипс теңдеуі болсын. Берілген нүктелердің координаттары осы теңдеуді қанағаттандыруы керек.

Ендеше

$$\frac{25}{4a^2} + \frac{3}{8b^2} = 1; \quad \frac{4}{a^2} + \frac{3}{5b^2} = 1.$$

Бұдан, $a^2 = 10$, $b^2 = 1$ екендігі шығады. Сонымен, эллипс теңдеуі:

$$\frac{x^2}{10} + y^2 = 1.$$

3.8 мысал. Ox өсіне қатысты симметриялы, төбесі координаттар бас нүктесінде болатын парабола теңдеуін жазу керек. Осы параболаның қандай да бір Ox өсіне перпендикуляр хордасының ұзындығы 16, ал осы хорданың төбеге дейінгі қашықтығы 6-ға тең екені белгілі.

Шешуі: хорданың ұзындығы мен оның төбеге дейінгі қашықтығы белгілі болғандықтан, хорданың ұшы болатын параболада жататын M нүктесінің координаттарын табуға болады: $M(6;8)$.

Парабола теңдеулерін $y^2 = 2px$, түрінде іздейміз. Бұдан, $8^2 = 2p \cdot 6 \Rightarrow 2p = \frac{32}{3}$. Сонымен, $y^2 = \frac{32}{3}x$ - ізделінді парабола теңдеуі.

Жаттығулар.

1. $A(2;3)$ және $B(-10;-2)$ нүктелердің ара қашықтығын табу керек.

Жауабы: 13.

2. $C(\sqrt{2}; -\sqrt{7})$ және $D(2\sqrt{2}; 0)$ нүктелердің ара қашықтығын табу керек.

Жауабы: 3.

3. Төбелері $A(4;3)$, $B(7;6)$, $C(2;11)$ болатын үшбұрыш тікбұрышты болатынын көрсету керек.

4. Төбелері $A(2;-1)$, $B(4;2)$, $C(5;1)$ болатын үшбұрыш теңбүйірлі болатынын көрсету керек.

5. Үшбұрыш төбелері: $A(-1;-1)$, $B(0;-6)$, $C(-10;-2)$ берілген. A төбесінен жүргізілген медиана ұзындығын табу керек.

Жауабы: 5.

6. AB кесінді ұштары берілген: $A(-3;7)$, $B(5;11)$. Осы кесінді үш нүкте арқылы төрт бірдей бөлікке бөлінген. Осы нүктелердің координаталарын табу керек.

Жауабы: $(-1;8)$, $(1;9)$, $(3;10)$.

7. Төбелері $A(1;5)$, $B(2;7)$, $C(4;11)$ үшбұрыш ауданын есептеу керек.

Жауабы: $S=0$, яғни A, B, C бір түзу бойында жатады.

8. Параллелограмның үш төбесі берілген: $A(11;4)$, $B(-1;-1)$, $C(5;7)$. Төртінші D төбесінің координаталарын табу керек.

Жауабы: $D(17;12)$.

9. Үшбұрыштың екі төбесі $A(3;8)$ және $B(10;2)$ және медианалардың қиылысуы $M(1;1)$ нүктесі берілген. Үшбұрыштың үшінші C төбесін табу керек.

Жауабы: $C(-10;-7)$.

10. $A(7;2)$, $B(1;9)$, $C(-8;-11)$ үшбұрыш төбелері берілген. Медианалардың қиылысу нүктесінен үшбұрыш төбелеріне дейінгі қашықтықтарды табу керек.

Жауабы: $\sqrt{53}$, $\sqrt{82}$, $\sqrt{185}$.

11. Төбелері $A(0;2)$, $B(7;3)$, $C(1;6)$ болатын $\triangle ABC$ үшбұрышының $\alpha = \angle BAC$ бұрышының тангенсін табу керек.

Жауабы: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{27}{11}$.

12. Үшбұрыш қабырғалары берілген: $x + y - 6 = 0$, $3x - 5y + 14 = 0$, $5x - 3y - 14 = 0$. Оның биіктіктерінің теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $x - y = 0$, $5x + 3y - 26 = 0$, $3x + 5y - 26 = 0$.

13. $3x + 4y - 20 = 0$ және $8x + 6y - 5 = 0$ түзулерінің арасындағы бұрыштардың биссектрисаларының теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $14x + 14y - 45 = 0$, $2x - 2y + 35 = 0$.

14. Үшбұрыш төбелері берілген: $A(0;0)$, $B(-1;-3)$, $C(-5;-1)$. Үшбұрыш төбелері арқылы өтетін, қабырғаларына параллель түзулердің теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $3x - y + 14 = 0$, $x - 5y - 14 = 0$, $x + 2y = 0$.

15. $A(-1;7)$, $B(8;-2)$ нүктелері арқылы өтетін AB түзуімен 45° бұрыш жасап, $M(2;7)$ нүктесі арқылы өтетін түзулердің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x - 2 = 0$, $y - 7 = 0$.

16. $M(2;-1)$ нүктесінен координата өстерінен $a = 8$, $b = 6$ кесінділерін қиятын түзуге дейінгі қашықтықты табу керек.

Жауабы: 4,4.

17. $A\left(\frac{3}{2}; 1\right), B\left(1; \frac{5}{3}\right), C(3; 3)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыштың

C төбесінен жүргізілген биіктіктің ұзындығын табу керек.

Жауабы: 2,4.

18. m -нің қандай мәнінде $7x - 2y - 5 = 0$, $x + 7y - 8 = 0$ және $mx + my - 8 = 0$ түзулері бір нүктеде қиылысады?

Жауабы: $m = 4$.

19. $A_1(-1; -1), B_1(1; 9), C_1(9; 1)$ нүктелері - үшбұрыш қабырғаларының орталары екені белгілі. Үшбұрыш қабырғаларының орта перпендикулярларының теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $x - y = 0$, $x + 5y - 14 = 0$, $5x + y - 14 = 0$.

20. Ордината өсінің $A(2; \sqrt{3})$ және $B(3; 2\sqrt{3})$ нүктелері арқылы өтетін түзумен жасайтын сүйір бұрышының табу керек.

Жауабы: $\frac{\pi}{6}$.

21. $A(1; 2)$ және $C(3; 6)$ – квадраттың қарсы жатқан төбелері. Қалған екі төбесінің координаттарын табу керек.

Жауабы: $(0; 5)$, $(4; 3)$.

22. $8x + 15y + 10 = 0$ түзуге дейінгі қашықтығы 1-ге тең болатын абсцисса өсінің бойындағы нүктені табу керек.

Жауабы: $\left(\frac{7}{8}; 0\right)$ және $\left(-\frac{27}{8}; 0\right)$.

23. $A(1; 1), B(4; 5), C(13; -4)$ нүктелері үшбұрыш төбелері. B төбесінен жүргізілген медиана мен C төбесінен түсірілген биіктіктің теңдеулерін табу керек. Үшбұрыш ауданын есептеу керек.

Жауабы: $13x + 6y - 82 = 0$, $3x + 4y - 23 = 0$. $S = 31,5$ кв.бірлік.

24. $x + 6y + 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесі мен $M(-0,8; 4,3)$ нүктесі арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $5x + 4 = 0$.

25. $x + 2y + 3 = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, $5x + 8y = 0$ түзуіне параллель болатын түзуді табу керек.

Жауабы: $5x + 8y + 11 = 0$.

26. $3x - y - 1 = 0$, $x + 3y + 1 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, абсцисса өсіне параллель түзуді табу керек.

Жауабы: $5y + 2 = 0$.

27. $5x + 3y + 10 = 0$, $x + y - 15 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесі мен координаттар басы арқылы өтетін түзуді табу керек.

Жауабы: $17x + 11y = 0$.

28. $x + 2y + 1 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ түзулерінің қиылысу нүктесі арқылы өтетін, абсцисса өсімен 135° бұрыш жасайтын түзуді табу керек.

Жауабы: $x + y + 1 = 0$.

29. $M(a;b)$ нүктесі арқылы өтетін, $x + y + c = 0$ түзуімен 45° бұрыш жасайтын түзулердің теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $x = a$, $y = b$.

30. Үшбұрыш қабырғалары берілген: $x - y = 0$ (AB), $x + y - 2 = 0$ (BC), $y = 0$ (AC). B төбесі арқылы өтетін медиана мен A төбесі арқылы өтетін биіктіктің теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $x = 1$, $y = x$.

31. Қабырғалары: $x + y\sqrt{3} + 1 = 0$, $x\sqrt{3} + y + 1 = 0$ және $x - y - 10 = 0$ болатын үшбұрыш тең бүйірлі екенін көрсету керек. Төбесіндегі бұрышты табу керек.

Жауабы: 30° .

32. Параллелограмның көршілес төбелері берілген: $A(0;0)$, $B(1;3)$, $C(7;1)$. Диагональдарының арасындағы бұрышты тауып және осы параллелограмның тіктөртбұрыш болатынын көрсету керек.

Жауабы: $\varphi = 53^\circ 8'$.

33. Үшбұрыш қабырғалары берілген: $x - y + 2 = 0$ (AB), $x = 2$ (BC), $x + y - 2 = 0$ (AC). A төбесі және AC қабырғасын (A төбесінен бастап санағанда) $1:3$ қатынасындай бөлетін нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $5x - 3y + 2 = 0$.

34. $A(1;1)$, $B(2;1 + \sqrt{3})$, $C(3;1)$ нүктелері төбелері болатын үшбұрыш тең қабырғалы болатынын көрсетіп, оның ауданын есептеу керек.

Жауабы: $\sqrt{3}$ кв. бірлік.

35. $A(3;9)$ үшбұрыш төбесі және $y - 6 = 0$, $3x - 4y + 9 = 0$ медианалары берілген. Қалған екі төбесінің координаттарын табу керек.

Жауабы: $B(1;3)$, $C(11;6)$.

Төмендегі теңдеулермен қандай қисықтар анықталғандығын табу керек.

$$36. 36x^2 + 36y^2 - 36x - 24y - 23 = 0$$

Жауабы: Шеңбер $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 1$.

$$37. 16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y - 359 = 0$$

Жауабы: Эллипс $\frac{x_*^2}{25} + \frac{y_*^2}{16} = 1$, $O^*(1;-1)$ – жаңа бас нүкте.

$$38. \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y - 1 = 0$$

Жауабы: Гипербола $\frac{x_*^2}{4} - \frac{y_*^2}{9} = 1$; $O^*(2;3)$ - жаңа бас нүкте.

$$39. 2x - y^2 - 2y + 5 = 0$$

Жауабы: Парабола $y_*^2 = 2x_*$ $O^*(-3;-1)$ - жаңа бас нүкте.

40. Төбесі координата басында болатын, Ox өсіне қатысты симметриялы және $M(4;2)$ нүктесі арқылы өтетін парабола теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $y^2 = x$.

3.2 Кеңістіктегі аналитикалық геометрия

3.2.1 Аналитикалық геометрия есептері.

Егер кеңістікте тік бұрышты $OXYZ$ координаталар жүйесі берілсе, онда осы жазықтықтың x , y және z координаталары бар M нүктесін – $M(x; y; z)$ деп белгілейді.

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің ара қашықтығы d мына формула арқылы анықталады:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ және $M_2(x_2; y_2; z_2)$ нүктелерінің арасындағы кесіндіні берілген λ қатынаста бөлетін $M(x; y; z)$ нүктесінің координаталары келесі формулалармен анықталады:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Дербес жағдайда, $\lambda = 1$ болғанда кесіндінің ортасының координаталары:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

3.9 мысал. $M_1(3; -2; 2)$, $M_2(5; -8; -3)$ төбелерінің координаталары берілген:

1) M_1M_2 қабырғасының ұзындығын табу керек.

Шешуі:

$$\begin{aligned} |M_1M_2| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(5-3)^2 + (-8+2)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{4+36+25} = \sqrt{65}. \end{aligned}$$

2) M_1M_2 қабырғасының бойынан M_1 -ге дейінгі қашықтығы M_2 -ге дейінгі қашықтығынан 4 есе үлкен болатын M нүктесінің координаталарын табу керек.

Шешуі:

$$\frac{|M_1 D|}{|DM_2|} = \lambda = 4;$$

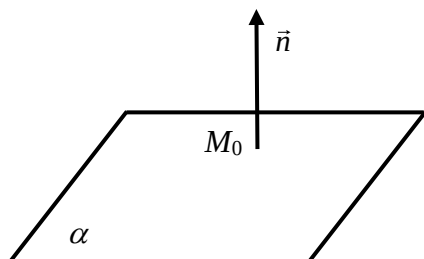
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{3 + 4 \cdot 5}{1 + 4} = 4,6;$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{-2 + 4 \cdot (-8)}{1 + 4} = -6,8;$$

$$z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 4 \cdot (-3)}{1 + 4} = 3,6;$$

M нүктесінің координаталары: $M(4,6; -6,8; 3,6)$.

3.2.2 Жазықтық теңдеулері.



3.10 сурет

Кеңістікте декарттық координат жүйесінде берілген кез келген жазықтыққа бірінші дәрежелі теңдеу сәйкес келеді және керісінше бірінші дәрежелі теңдеуге кеңістікте жазықтық сәйкес келеді. Жазықтықтың жалпы теңдеуі

$$\alpha: Ax + By + Cz + D = 0. \quad (3.1)$$

$\vec{n} = \{A; B; C\}$ - жазықтықтың нормаль векторы, $\vec{n} \perp \alpha$.

Бізге $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі, $n = \{A; B; C\}$ жазықтықтың нормаль векторы берілсе, онда M_0 нүктесі арқылы өтетін $\vec{n}$ - нормаль векторы болатын жазықтық теңдеуі мына түрде жазылады:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

3.10 мысал. $M(2;3;5)$ нүктесі арқылы өтетін және нормаль векторы $\vec{n} = \{4;3;2\}$ болатын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Шешуі: нүктесі мен нормаль векторы арқылы жазықтық теңдеуін (3.1) формуласы бойынша жазайық:

$$4(x - 2) + 3(y - 3) + 2(z - 5) = 0,$$

яғни

$$4x + 3y + 2z - 27 = 0.$$

Жазықтықтардың өзара орналасуы.

Екі жазықтық арасындағы бұрыш. Екі жазықтық арасындағы бұрышты олардың нормальдарының арасындағы бұрыш есебінде алуға болады:

$$\alpha_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \alpha_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

теңдеулерімен α_1, α_2 жазықтықтары берілсін.

$\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \perp \alpha_1$, $\vec{n}_1$ - α_1 жазықтығының нормаль векторы;

$\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \perp \alpha_2$, $\vec{n}_2$ - α_2 жазықтығының нормаль векторы.

Жазықтықтардың арасындағы бұрышты φ деп белгілейік. Осы бұрыштың косинусы былай есептелінеді:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.2)$$

Егер $\alpha_1 // \alpha_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

Егер $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$

«Кесінді» түріндегі жазықтық теңдеуі.

Жазықтықтың жалпы теңдеуі $Ax + By + Cz + D = 0$ берілсін. Осы теңдеуді түрлендірейік:

$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1.$$

Егер $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b, -\frac{D}{C} = c$ деп белгілесек, онда:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3.3)$$

жазықтықтың «кесінді» түріндегі теңдеуін аламыз.

$\vec{n}$ нормаль векторы OX, OY, OZ координат өстерімен сәйкесінше α, β, γ бұрыштарын жасасын. O нүктесінен M нүктесіне қарайғы бағытты оң бағыт деп алайық. OM кесіндісінің ұзындығы $p = |OM|$ болсын.

Бағыттаушы косинустар $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ белгілі деп есептеп, жазықтық теңдеуін жазайық. $\forall A(x, y, z) \in \alpha$ нүктесін алайық. Сонда:

$$\begin{aligned} np_{\vec{n}} \overrightarrow{OA} &= p; \overrightarrow{OA} = \{x; y; z\}; \vec{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}; \\ np_{\vec{n}} \overrightarrow{OA} &= x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \end{aligned}$$

Осыдан $np_{\vec{n}} \overrightarrow{OA} = p$ екенін ескеріп:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0 \quad (3.4)$$

жазықтықтың нормаль теңдеуін аламыз.

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтық d мына формуламен есептелінеді:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.5)$$

Жазықтық теңдеуін құруға арналған негізгі есептер:

а) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нүктесі арқылы өтетін $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$

($\vec{a}$ мен $\vec{b}$ коллинеар емес векторлар) векторларына параллель α жазықтығының теңдеуін жазу керек.

α жазықтығында жататын кез келген $M(x, y, z)$ нүктесін алайық.

$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$, $\vec{a}, \vec{b}$ - векторлары компланар векторлар.

Олай болса $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Осыдан α жазықтығының теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0; \quad (3.6)$$

ә) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ векторына параллель жазықтық теңдеуін жазу керек:

$M(x, y, z) \in \alpha$; $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$,

онда $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}$ - компланар векторлар.

Олай болса $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \vec{a} = 0$.

Осыдан α жазықтығының теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0; \quad (3.7)$$

б) $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек:

$M(x, y, z) \in \alpha$.

Келесі векторларды табайық:

$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$;

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$;

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$.

$\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$ компланар векторлар. $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$.

Осыдан α жазықтығының теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

3.11 мысал. $M_1M_2M_3M_4$ - үшбұрышты пирамиданың $M_1(3;-2;2)$, $M_2(5;-8;-3)$, $M_3(-1;4;5)$, $M_4(4;3;-4)$ төбелерінің координаталары берілген.

1. $M_1M_2M_3$ жазықтығының теңдеуін табу керек.

Шешуі: $M_1M_2M_3$ - нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу үшін (3.8) формуланы пайдаланамыз:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 5-3 & -8+2 & -3-2 \\ -1-3 & 4+2 & 5-2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-18(x-3) + 20(y+2) + 12(z-2) - 24(z-2) - 6(y+2) + 30(x-3) = 0;$$

$$12(x-3) + 14(y+2) - 12(z-2) = 0;$$

$$12x - 36 + 14y + 28 - 12z + 24 = 0;$$

$$12x + 14y - 12z + 16 = 0;$$

$$6x + 7y - 6z + 8 = 0.$$

$M_1M_2M_3$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$

2. M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына параллель жазықтығының теңдеуін табу керек.

Шешуі: $M_1M_2M_3$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ болады. M_4 нүктесі арқылы өтетін жазықтық $M_1M_2M_3$ жазықтығына параллель болғандықтан, бұл вектор ізделінді жазықтық үшін де нормаль вектор болады. Сондықтан:

$$6(x-x_4) + 7(y-y_4) - 6(z-z_4) = 0;$$

$$6(x-4) + 7(y-3) - 6(z+4) = 0;$$

$$6x + 7y - 6z - 69 = 0 - \text{ізделінді жазықтық теңдеуі.}$$

3. M_1 , M_4 нүктелері арқылы өтетін және $M_1M_2M_3$ жазықтығына перпендикуляр жазықтықтың теңдеуін табу керек.

Шешуі:

$$\overrightarrow{M_1M} = \{x-x_1; y-y_1; z-z_1\} = \{x-3; y+2; z-2\};$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \{x_4-x_1; y_4-y_1; z_4-z_1\} = \{1; 5; -6\}$$

және $M_1M_2M_3$ жазықтықтың $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ нормаль векторлары - компланар векторлар. Осыдан ізделінді жазықтықтың теңдеуі:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ 1 & 5 & -6 \\ 6 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-30(x-3) - 36(y+2) + 7(z-2) - 30(z-2) + 6(y+2) + 42(x-3) = 0;$$

$$12(x-3) - 30(y+2) - 23(z-2) = 0;$$

$$12x - 36 - 30y - 60 - 23z + 46 = 0;$$

$$12x - 30y - 23z - 50 = 0.$$

4. $M_1M_2M_3$ және $M_1M_2M_4$ жазықтықтардың арасындағы бұрышты табу керек.

Шешуі: $M_1M_2M_3$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ болады. Енді $M_1M_2M_4$ жазықтығының нормаль векторы $\vec{n}_2$ табайық:

$$\begin{aligned} \vec{n}_2 = [M_1M_2 \times M_1M_4] &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -5 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \\ &= 36\vec{i} - 5\vec{j} + 10\vec{k} + 6\vec{k} + 12\vec{j} + 25\vec{i} = 61\vec{i} + 7\vec{j} + 16\vec{k}; \\ \vec{n}_2 &= \{61; 7; 16\}. \end{aligned}$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш ол олардың $n_1 = \{6; 7; -6\}$ және $n_2 = \{61; 7; 16\}$ нормалдарының арасындағы бұрыш. Олай болса:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{6 \cdot 61 + 7 \cdot 7 + (-6) \cdot 16}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{61^2 + 7^2 + 16^2}} = \frac{319}{11 \cdot \sqrt{4026}};$$

$$\alpha = \arccos \frac{319}{11 \cdot \sqrt{4026}}.$$

5. M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтығына түсірілген биіктіктің ұзындығын (яғни M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтығына дейінгі ара қашықтығын) табу керек.

Шешуі: M_4 нүктесінен $M_1M_2M_3$ жазықтыққа дейінгі ара қашықтықтың:

$$d = \frac{|Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

формулансын пайдалансақ, онда:

$$d = \left| \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 3 - 9 \cdot (-4) + 8}{\sqrt{36 + 49 + 36}} \right| = \frac{77}{11} = 7.$$

6. $M_1M_2M_3$ үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі: $M_1M_2M_3$ -ның ауданы $\vec{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$ және $\vec{a}_3 = \overrightarrow{M_1M_3} = \{-4; 6; 3\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелограмм ауданының жартысына тең, сондықтан бұл векторлардың векторлық көбейтіндісін табамыз:

$$\begin{aligned}\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -18\vec{i} + 20\vec{j} + 12\vec{k} - 24\vec{k} - 6\vec{j} + 30\vec{i} = \\ &= 12\vec{i} + 14\vec{j} - 12\vec{k}.\end{aligned}$$

Бұдан

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{12^2 + 14^2 + 12^2} = \frac{1}{2} \cdot 22 = 11 \text{ (кв. бірлік)}.$$

3.2.3 Кеңістіктегі түзу теңдеуі.

Кеңістікте түзу екі жазықтықтың қиылысуы арқылы анықталады:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}; \quad \alpha_1 \neq \alpha_2. \quad (3.9)$$

Бұл жазықтықтардың нормаль векторлары:

$$\alpha_1 : \vec{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}, \quad \alpha_2 : \vec{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}.$$

Түзулердің бағыттаушы векторы $\vec{a} \perp \vec{N}_1$, $\vec{a} \perp \vec{N}_2$, олай болса $\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \{l; m; n\}$ - бағыттаушы вектор.

Түзудің жалпы (3.9) түрдегі теңдеуінен канондық теңдеуіне көшуді қарастырайық.

Бағыттаушы вектор:

$$\vec{a} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = l\vec{i} + m\vec{j} + n\vec{k}$$

тең болсын. $z = z_1$ мән беріп, (3.9) жүйеден $x = x_1$, $y = y_1$ табамыз.

Олай болса, түзудің канондық теңдеуі:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (3.10)$$

Түзудің канондық теңдеуін $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = t$ параметріне теңестірсек, онда түзудің параметрлік теңдеуі:

$$\begin{cases} x = lt + x_1 \\ y = mt + y_1 \\ z = nt + z_1 \end{cases}$$

Екі түзудің өзара орналасуы.

Екі түзу канондық теңдеулерімен берілсін:

$$\tilde{l}_1: \frac{x-a_1}{l_1} = \frac{y-b_1}{m_1} = \frac{z-c_1}{n_1}; \quad \tilde{l}_2: \frac{x-a_2}{l_2} = \frac{y-b_2}{m_2} = \frac{z-c_2}{n_2}.$$

Осы түзулерде жататын нүктелерді алайық:

$$M_1(a_1, b_1, c_1) \in \tilde{l}_1, \quad M_2(a_2, b_2, c_2) \in \tilde{l}_2.$$

$\vec{a}_1 = \{l_1, m_1, n_1\}$, $\vec{a}_2 = \{l_2, m_2, n_2\}$ - берілген түзулердің бағыттаушы векторлары болғандықтан:

$$\vec{a}_1 // \tilde{l}_1, \quad \vec{a}_2 // \tilde{l}_2, \quad \alpha = (\tilde{l}_1, \tilde{l}_2).$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}} \quad (3.11)$$

– бағыттаушы векторлардың арасындағы бұрыштың косинусы.

$l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$ немесе $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$ – түзулердің перпендикулярлық белгісі.

$$l_1 // l_2 \Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad - \text{түзулердің параллельдік белгісі.}$$

Түзу мен жазықтыққа арналған есептер.

$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$ түзуі мен $Ax + By + Cz + D = 0$ жазықтығы берілсін.

Түзу мен жазықтықтың арасындағы сүйір бұрыш деп түзу мен проекциясының арасындағы бұрышты айтады.

Бұл бұрыштың синусы мына формуламен анықталады:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{a}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{a}|} = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \quad (3.12)$$

$\vec{n} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ - түзу мен жазықтықтың параллельдік белгісі;

$\vec{n} // \vec{a} \Rightarrow \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$ - түзу мен жазықтықтың перпендикулярлық белгісі.

3.12 мысал. $M_1M_2M_3M_4$ - үшбұрышты пирамиданың $M_1(3; -2; 2)$, $M_2(5; -8; -3)$, $M_3(-1; 4; 5)$, $M_4(4; 3; -4)$ төбелерінің координаталары берілген.

1. M_1M_2 қабырғасының (түзуінің) теңдеуін табу керек.

Шешуі: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нүктелері арқылы өтетін түзу теңдеуі $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Осыдан $\frac{x-3}{5-3} = \frac{y+2}{-8+2} = \frac{z-2}{-3-2}$.

Онда $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z-2}{-5}$ - M_1M_2 түзуінің теңдеуі. Мұндағы M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторы $\vec{a}_{12} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$.

2. M_3 нүктесі арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі: ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторын $\vec{a}_{12} = \{2; -6; -5\}$ алуға болады. Ізделінді түзудің теңдеуі:

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-5}{-5}.$$

3. M_4 нүктесі арқылы өтетін $M_1M_2M_3$ жазықтығына перпендикуляр түзудің теңдеуін табу керек.

Шешуі: ізделінді түзудің бағыттаушы векторы ретінде $M_1M_2M_3$ жазықтығының $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ нормаль векторы алуға болады (3.11 есеп п.1). Ізделінді түзудің теңдеуі:

$$\frac{x-4}{6} = \frac{y-3}{7} = \frac{z+4}{-6}.$$

4. M_1M_2 қабырғасының ортасы арқылы өтетін және M_1M_2 түзуіне перпендикуляр жазықтығының теңдеуін табу керек.

Шешуі: M_1M_2 қабырғасының ортасы E нүктесінің координатасын табайық:

$$x_E = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = 4; \quad y_E = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-2-8}{2} = -5;$$

$$z_E = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{2-3}{2} = -0,5; \quad E(4; -5; -0,5).$$

Ізделінді жазықтықтың нормаль векторын ретінде M_1M_2 түзуінің бағыттаушы векторын $\vec{a}_1 = \{2; -6; -5\}$ алуға болады:

$$2(x-4) - 6(y+5) - 5(z+0,5) = 0;$$

$$2x - 6y - 5z - 40,5 = 0;$$

$$4x - 12y - 10z - 81 = 0 - \text{ізделінді жазықтық теңдеуі.}$$

5. M_1M_2 және M_1M_4 түзулерінің арасындағы бұрышын табу керек.

Шешуі: екі түзудің арасындағы бұрыш ол олардың $\vec{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$ және $\vec{a}_2 = \overrightarrow{M_1M_4} = \{1; 5; -6\}$ бағыттаушы векторларының арасындағы бұрыш. Олай болса:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|} = \frac{2 \cdot 1 + (-6) \cdot 5 + (-5) \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{-58}{\sqrt{4030}};$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-58}{\sqrt{4030}}\right).$$

6. M_1M_4 түзуі мен $M_1M_2M_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын табу керек.

Шешуі: M_1M_4 түзуімен және $M_1M_2M_3$ жазықтығының арасындағы бұрышын табу үшін $\vec{a}_{14} = \overrightarrow{M_1M_4} = \{1, 5, -6\}$ бағыттаушы вектор мен $\vec{n}_1 = \{6; 7; -6\}$ нормаль векторлар арасындағы (түзумен жазықтықтың арасындағы) φ бұрышын анықтаймыз:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{a}_{14}|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{a}_{14}|} = \frac{6 \cdot 1 + 7 \cdot 5 + (-6) \cdot (-6)}{\sqrt{6^2 + 7^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + (-6)^2}} = \frac{77}{11 \cdot \sqrt{62}};$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{77}{11 \cdot \sqrt{62}}\right).$$

7. $M_1M_2M_3M_4$ - үшбұрышты пирамиданың көлемін табу керек.

Шешуі: үшбұрышты пирамиданың көлемі $\vec{a}_1 = \overrightarrow{M_1M_2} = \{2; -6; -5\}$, $\vec{a}_2 = \overrightarrow{M_1M_3} = \{-4; 6; 3\}$, $\vec{a}_3 = \overrightarrow{M_1M_4} = \{1; 5; -6\}$ векторлары арқылы тұрғызылған параллелепипед көлемінің $\frac{1}{6}$ бөлігіне тең, сондықтан бұл векторлардың аралас көбейтіндісін табамыз:

$$\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -6 & -5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = -72 - 18 + 100 + 30 + 144 - 30 = 274 - 120 = 154.$$

Осыдан

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3| = \frac{1}{6} \cdot 154 = \frac{77}{3} \text{ (куб.бірлік)}.$$

3.2.4 Екінші ретті беттер.

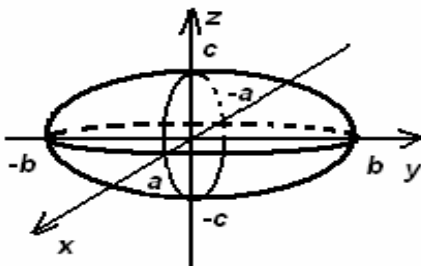
Декарттық координат жүйесінде екінші ретті беттер:

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2B_1 xy + 2B_2 xz + 2B_3 yz + \\ + 2C_1 x + 2C_2 y + 2C_3 z + D = 0$$

жалпы теңдеуімен беріледі, мұндағы $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ - бірдей нөлге тең емес сандар.

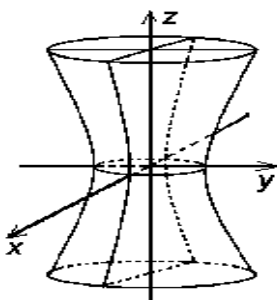
Кеңістікте екінші ретті теңдеумен өрнектелетін беттер:

1)



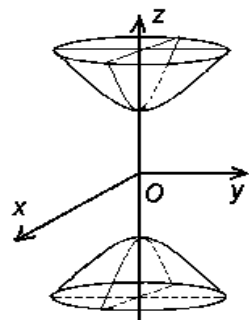
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - эллипсоид.}$$

2)



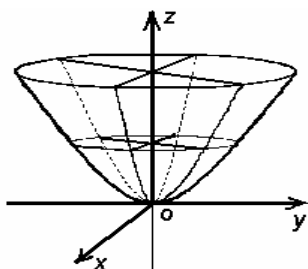
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ - бір қуысты гиперболоид.}$$

3)



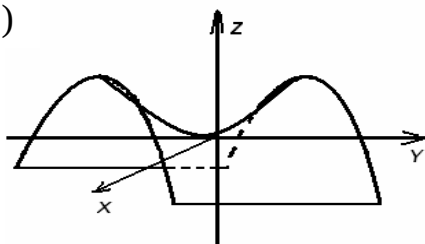
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ - екі қуысты гиперболоид,}$$

4)



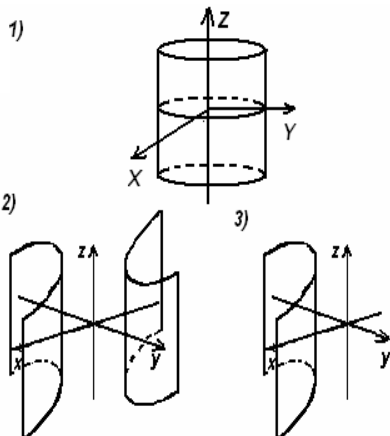
$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \text{ - эллипстік параболоид.}$$

5)



$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \text{ - гиперболаалық параболоид.}$$

6)

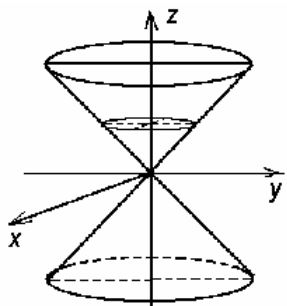


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - эллипстік цилиндр.}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ - гиперболаалық цилиндр.}$$

$$y^2 = 2px \text{ - параболаалық цилиндр.}$$

7)



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ - конус.}$$

3.13 мысал. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 18y - 72z + 13 = 0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: бірдей айнымалылы мүшелерін топтастырайық:

$$4(x^2 - 2x) + 9(y^2 - 2y) + 36(z^2 - 2z) = -13.$$

Жақша ішіндегі өрнектерді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 2y + 1) + 36(z^2 - 2z + 1) = -13 + 4 + 9 + 36;$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-1)^2 + 36(z-1)^2 = 36;$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} + (z-1)^2 = 1.$$

Бұл эллипсоид теңдеуі.

3.14 мысал. $x^2 - y^2 - 4x + 8y - 2z = 0$ теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Шешуі: x пен y -і бар мүшелерді топтастырайық:

$$(x^2 - 4x) - (y^2 - 8y) = 2z.$$

Жақшадағы өрнектерді толық квадратқа дейін толықтырайық:

$$(x^2 - 4x + 4) - (y^2 - 8y + 16) = 2z + 4 - 16$$

немесе

$$(x-2)^2 - (y-4)^2 = 2(z-6).$$

Бұл гиперболалық параболоидты анықтайды.

3.15 мысал. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y + 1 = 0$ теңдеуі қандай бетті анықтайды?

Шешуі: $(x^2 - x) + (y^2 + 2y) + z^2 = -1.$

Енді толық квадратқа дейін толықтырамыз:

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 = -1 + \frac{1}{4} + 1$$

немесе

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{4}.$$

Бұл центрі $C\left(\frac{1}{2}; -1; 0\right)$, радиусы $R = \frac{1}{2}$ сфераның теңдеуі.

3.16 мысал. $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 4y + 8z + 4 = 0$ теңдеуі қандай бетті анықтайды?

Шешуі: сәйкес түрлендірулер жасап аламыз:

$$4(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) + 4(z^2 + 2z) = -4$$

Бұдан:

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) + 4(z^2 + 2z + 4) = -4 + 4 - 4 + 4;$$

$$4(x-1)^2 - (y-2)^2 + 4(z+1)^2 = 0.$$

Бұл конус бетінің теңдеуі.

Жаттығулар

1. $x + y - z - 2 = 0$ жазықтығының теңдеуін нормаль түрге келтіру керек.

Жауабы: $\frac{x + y - z - 2}{\sqrt{3}} = 0.$

2. $3x + 5y - 4z + 7 = 0$ жазықтығының теңдеуін нормаль түрге келтіру керек.

Жауабы: $-\frac{3}{5\sqrt{2}}x - \frac{5}{\sqrt{2}}y + \frac{4}{5\sqrt{2}}z - \frac{7}{5\sqrt{2}} = 0.$

3. $M_0(1;3;-2)$ нүктесінен $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ жазықтығына дейінгі қашықтықты табу керек. M_0 нүктесі жазықтыққа қатысты қалай орналасқан?

Жауабы: $d = \frac{13}{\sqrt{29}}$ координат бас нүктесі мен M_0 нүктесі жазықтыққа қатысты әр жақта орналасады.

4. $M_0(2;3;-5)$ нүктесінен $4x - 2y + 5z - 12 = 0$ жазықтығына түсірілген перпендикуляр ұзындығын табу керек.

Жауабы: $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}.$

5. 1) $M(-2;3;4)$ нүктесі арқылы өтетін, координат өстерінен бірдей кесінділер қиятын.

2) $N(2;-1;4)$ нүктесі арқылы өтетін, Oz өсінен Ox және Oy өстеріне қарағанда екі есе үлкен кесінді қиятын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: 1) $x + y + z - 5 = 0.$

2) $2x + 2y + z - 6 = 0.$

6. $P(2;0;-1)$ және $Q(1;-1;3)$ нүктелері арқылы өтетін, $3x + 2y - z + 5 = 0$ жазықтығына перпендикуляр жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $7x - 11y - z - 15 = 0.$

7. $2x - 5y + 2z + 5 = 0$ жазықтығының бойынан, OM түзуі координат өстерімен бірдей бұрыштар жасайтындай, M нүктесін табу керек.

Жауабы: $M(5;5;5).$

8. $P(4;-3;12)$ нүктесі координат басынан қандай да бір жазықтыққа түсірілген биіктіктің табаны екені белгілі. Сол жазықтықтың теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $4x - 3y + 12z - 169 = 0.$

9. $3x - 4y + 5z - 12 = 0$ жазықтығына перпендикуляр, координат өстері арқылы өтетін жазықтықтардың теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $5y + 4z = 0$; $5x - 3z = 0$; $4x + 3y = 0$.

10. $P(1; -4; 2)$ және $Q(7; 1; -5)$ нүктелерінен бірдей қашықтықта орналасқан жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $6x + 5y - 7z - 27 = 0$.

11. $P(0; 2; 0)$ және $Q(2; 0; 0)$ нүктелері арқылы өтетін, $x = 0$ жазықтығымен 60° бұрыш жасайтын жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\pm\sqrt{2}} = 1$.

12. $M(1; -1; -1)$ нүктесі арқылы өтетін, біреуі Ox өсін, екіншісі Oz өсін қамтитын жазықтықтар арасындағы бұрышты табу керек.

Жауабы: 60° .

13. Координат бас нүктесі мен $P(4; -2; 1)$, $Q(2; 4; -3)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x + 7y + 10z = 0$.

14. $2x + 2y + z - 7 = 0$, $2x - y + 3z - 3 = 0$, $4x + 5y - 2z - 12 = 0$ жазықтықтарының қиылысу нүктесі мен $M(0; 3; 0)$, $N(1; 1; 1)$ нүктелері арқылы өтетін жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x - z = 0$

15. $M(0; 2; 1)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{a} = \{1; 1; 1\}$, $\vec{b} = \{1; 1; -1\}$ векторларына параллель жазықтық теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x - y + 2 = 0$.

16. $\vec{a} = \{1; 2; 1\}$ векторы $x + y + 2z - 4 = 0$ жазықтығымен қандай бұрыш жасайды?

Жауабы: $\arcsin \frac{5}{6}$.

17. $M(5; 3; 4)$ нүктесі арқылы өтетін, $\vec{s} = \{2; 5; -8\}$ векторына параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-5}{2} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-4}{-8}$.

18. $\begin{cases} 2x + 3y - 16z - 7 = 0 \\ 3x + y - 17z = 0 \end{cases}$ түзуінің теңдеуін канондық түрге келтіру керек.

Жауабы: $\frac{x+1}{5} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$.

19. $\begin{cases} x - 2y - 5 = 0 \\ x - 3z + 8 = 0 \end{cases}$ түзуінің координат өстерімен жасайтын бұрыштарын табу керек.

Жауабы: $\cos \alpha = \frac{6}{7}, \cos \beta = \frac{3}{7}, \cos \gamma = \frac{2}{7}.$

20. $M(1; -2; 3)$ нүктесі арқылы өтетін Ox және Oy осьтерімен 45° және 60° бұрыштарын жасайтын түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-1}{\sqrt{2}} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{\pm 1}.$

21. $N(5; -1; -3)$ нүктесі арқылы өтетін және $\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0 \\ 4x - 5z - z + 2 = 0 \end{cases}$ түзуіне параллель болатын түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}.$

22. Параллелограмның үш төбесі берілген: $A(3; 0; -1), B(1; 2; -4)$ және $C(0; 7; -2)$. AD және CD қабырғаларының теңдеулерін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-3}{-1} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2}, \frac{x}{2} = \frac{y-7}{-2} = \frac{z+2}{3}.$

23. $M(2; -5; 1)$ және $N(-1; 1; 2)$ нүктелері арқылы өтетін түзудің параметрлік теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $x = -3t + 2, y = 6t - 5, z = t + 1.$

24. $\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}$ және $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}$ түзулерінің ара қашықтығын табу керек.

Жауабы: $d = \frac{5\sqrt{30}}{6}.$

25. $A(-1; 2; 3)$ және $B(2; -3; 1)$ нүктелері берілген. $M(3; -1; 2)$ нүктесі арқылы өтетін, $\overrightarrow{AB}$ векторына параллель түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2}.$

26. $\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases}$ және $\begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$ түзулерінің арасындағы бұрыштың косинусын табу керек.

Жауабы: $\cos \varphi = \frac{20}{21}.$

27. $ABCD$ параллелограмның екі төбесі $C(-2;3;-7), D(0;4;-7)$ және $M(1;2;-3,5)$ диагональдарының қиылысу нүктесі берілген. AB қабырғасының теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-4}{2} = y-1 = \frac{z+2}{-2}.$

28. $A(1;1;1), B(2;3;3)$ және $C(3;3;2)$ нүктелері берілген. A нүктесі арқылы өтетін, $\overline{AB}$ және $\overline{AC}$ векторларына перпендикуляр түзудің теңдеуін жазу керек.

Жауабы: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}.$

Жазықтықтағы аналитикалық геометрия элементтері тақырыбына арналған есептеу-сызбалық жұмыс.

1. ABC - үшбұрышының $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2), C(x_3; y_3)$ төбелерінің координаталары берілген:

- үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтары мен теңдеулерін;
- C нүктесінен жүргізілген биіктіктің теңдеуін;
- A нүктесінен жүргізілген медиананың теңдеуін;
- үшбұрыштың бұрыштарын;
- үшбұрыштың ауданын табу керек.

№	A	B	C	№	A	B	C
1	(-6;-4)	(-10;-1)	(6;1)	16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
2	(12;0)	(18;8)	(0;5)	17	(5;-3)	(1;0)	(2;-1)
3	(-2;-6)	(-6;-3)	(-4;7)	18	(14;-6)	(20;2)	(2;-1)
4	(-4;-5)	(-2;2)	(-7;4)	19	(3;4)	(-1;7)	(15;9)
5	(3;4)	(6;7)	(1;1)	20	(1;-2)	(7;6)	(-11;3)
6	(-2;-1)	(7;3)	(4;-3)	21	(1;1)	(3;-1)	(-4;3)
7	(6;-4)	(-3;-7)	(-1;2)	22	(-1;1)	(1;37)	(1;-4)
8	(3;2)	(2;-5)	(-6;-1)	23	(1;0)	(-1;2)	(-3;-2)
9	(-3;2)	(-2;5)	(6;-1)	24	(2;1)	(-2;-2)	(4;3)
10	(-4;-5)	(3;3)	(5;-2)	25	(-2;-3)	(3;3)	(0;4)
11	(2;5)	(-3;4)	(-4;-2)	26	(2;-1)	(-1;-1)	(4;-1)
12	(3;-2)	(-5;-4)	(-1;6)	27	(0;3)	(4;4)	(-4;-2)
13	(3;4)	(2;-1)	(1;-7)	28	(3;1)	(-2;-3)	(5;5)
14	(8;2)	(-2;-1)	(-4;7)	29	(5;4)	(-3;-2)	(-5;-4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(14;1)	30	(3;3)	(-3;-2)	(4;-3)

2. Төмендегі екінші ретті қисықтарды сызыңдар.

№	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
1	$a = 2, b = 3, R = 3$	$a = 5, b = 3$	$a = 7, b = 5$	$p = 2$
2	$a = -3, b = 5, R = 2$	$a = 7, b = 2$	$a = 5, b = 4$	$p = 3,5$
3	$a = -1, b = 2, R = 4$	$a = 6, b = 5$	$a = 4, b = 3$	$p = 2,5$
4	$a = 3, b = -4, R = 5$	$a = 5, b = 4$	$a = 8, b = 5$	$p = 8$
5	$a = -3, b = -3, R = 2$	$a = 7, b = 5$	$a = 6, b = 3$	$p = 1,5$
6	$a = 1, b = -1, R = 1$	$a = 4, b = 2$	$a = 6, b = 5$	$p = -4,5$
7	$a = -2, b = 1, R = 6$	$a = 3, b = 2$	$a = 4, b = 2$	$p = 1$
8	$a = 4, b = -2, R = 7$	$a = 7, b = 6$	$a = 5, b = 3$	$p = 3$
9	$a = -4, b = 4, R = 3$	$a = 6, b = 3$	$a = 4, b = 6$	$p = -1$
10	$a = 5, b = -1, R = 2$	$a = 8, b = 3$	$a = 7, b = 3$	$p = -4$
11	$a = -5, b = -6, R = 4$	$a = 5, b = 2$	$a = 6, b = 8$	$p = 4$
12	$a = 1, b = -5, R = 1$	$a = 6, b = 4$	$a = 5, b = 2$	$p = 0,5$
13	$a = 3, b = 2, R = 6$	$a = 8, b = 5$	$a = 6, b = 2$	$p = -5$
14	$a = -2, b = -4, R = 7$	$a = 7, b = 4$	$a = 8, b = 6$	$p = -7$
15	$a = 3, b = 2, R = 3$	$a = 3, b = 5$	$a = 5, b = 7$	$p = -2$
16	$a = 5, b = -3, R = 2$	$a = 2, b = 7$	$a = 4, b = 5$	$p = 5$
17	$a = -1, b = -1, R = 4$	$a = 5, b = 6$	$a = 3, b = 4$	$p = -5,5$
18	$a = -4, b = 3, R = 5$	$a = 4, b = 5$	$a = 5, b = 8$	$p = 6$
19	$a = 3, b = 3, R = 2$	$a = 5, b = 7$	$a = 9, b = 6$	$p = -3,5$
20	$a = -1, b = 1, R = 1$	$a = 2, b = 4$	$a = 2, b = 3$	$p = 2$
21	$a = 1, b = -2, R = 6$	$a = 2, b = 3$	$a = 3, b = 5$	$p = -0,5$
22	$a = -2, b = 4, R = 7$	$a = 7, b = 4$	$a = 6, b = 4$	$p = 5,5$
23	$a = 4, b = -4, R = 2$	$a = 8, b = 6$	$a = 8, b = 4$	$p = -3$
24	$a = -1, b = 5, R = 2$	$a = 6, b = 7$	$a = 2, b = 4$	$p = -1,5$
25	$a = 6, b = -5, R = 4$	$a = 2, b = 6$	$a = 3, b = 2$	$p = -8$
26	$a = -5, b = 1, R = 1$	$a = 3, b = 4$	$a = 9, b = 3$	$p = 7$
27	$a = 3, b = -1, R = 5$	$a = 8, b = 4$	$a = 3, b = 6$	$p = -6$
28	$a = 2, b = 3, R = 6$	$a = 3, b = 7$	$a = 2, b = 5$	$p = 6,5$
29	$a = -4, b = -2, R = 7$	$a = 6, b = 8$	$a = 7, b = 5$	$p = 4,5$
30	$a = 0, b = -1, R = 2$	$a = 4, b = 6$	$a = 5, b = 6$	$p = 7,5$

3. $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, $A_4(x_4; y_4; z_4)$ нүктелері берілген:

а) A_4 нүктесінің A_1, A_2, A_3 нүктелері арқылы өтетін жазықтықтан ара қашықтығын;

ә) A_2, A_3, A_4 және A_1, A_2, A_3 нүктелері арқылы өтетін жазықтықтардың арасындағы бұрышты;

б) A_1 және A_4 нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін;

в) $A_1 A_4$ түзуі мен $A_1 A_2 A_3$ жазықтығының арасындағы бұрышты табу керек.

№	A_1	A_2	A_3	A_4	№	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4; 2; 5)	(0; 7; 2)	(0; 2; 7)	(3; 5; 0)	16	(0; 7; 1)	(4; 1; 6)	(4; 6; 3)	(3; 9; 8)
2	(4; 4; 10)	(4; 10; 2)	(2; 8; 4)	(9; 6; 4)	17	(5; 5; 4)	(3; 8; 4)	(3; 5; 10)	(5; 10; 2)
3	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(2; 10; 10)	(7; 5; 4)	18	(6; 1; 1)	(4; 6; 6)	(4; 5; 7)	(1; 2; 6)
4	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(5; 10; 4)	(1; 7; 8)	19	(7; 5; 3)	(9; 4; 4)	(4; 5; 7)	(1; 2; 6)
5	(10; 6; 6)	(-2; 8; 2)	(6; 8; 9)	(7; 10; 3)	20	(6; 6; 2)	(5; 4; 7)	(2; 4; 7)	(7; 3; 0)
6	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)	(4; 10; 9)	21	(1; 1; 3)	(4; 1; 5)	(2; 2; 1)	(5; 2; 3)
7	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)	(6; 9; 3)	22	(4; 1; 6)	(1; 1; 3)	(5; 2; 3)	(2; 2; 1)
8	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 11)	(2; 3; 7)	23	(2; 2; 1)	(5; 2; 3)	(1; 1; 3)	(4; 1; 6)
9	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)	(8; 10; 7)	24	(5; 2; 3)	(2; 2; 1)	(4; 1; 6)	(1; 1; 3)
10	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 6)	(8; 4; 1)	25	(1; 1; 1)	(4; -1; 2)	(2; 5; 1)	(6; 3; 4)
11	(3; 1; 4)	(-1; 6; 1)	(-1; 1; 6)	(0; 4; -1)	26	(4; 2; 1)	(1; 8; 3)	(0; 1; -4)	(7; 3; 0)
12	(3; 3; 9)	(6; 9; 1)	(1; 7; 3)	(8; 5; 8)	27	(2; 0; 2)	(1; 3; 5)	(2; 4; 4)	(5; 3; -2)
13	(3; 4; 5)	(5; 8; 3)	(1; 9; 9)	(6; 4; 8)	28	(2; 0; 3)	(3; 2; 2)	(2; 2; 5)	(1; 1; 1)
14	(2; 4; 3)	(7; 6; 3)	(4; 9; 3)	(3; 6; 7)	29	(2; -2; 3)	(6; 2; -3)	(3; 1; 4)	(2; -4; 3)
15	(9; 5; 5)	(-3; 7; 1)	(5; 7; 8)	(6; 9; 2)	30	(4; 6; 4)	(-1; 12; -4)	(2; 3; 5)	(1; 7; 3)

Тапсырмаларды шығару жолы.

1. ABC - үшбұрышының $A(4;6)$, $B(-4;0)$, $C(-1;-4)$ төбелерінің координаталары берілген.

а) үшбұрыш қабырғаларының ұзындықтары мен теңдеулерін;

ә) C нүктесінен жүргізілген биіктіктің теңдеуін;

б) A нүктесінен жүргізілген медиананың теңдеуін;

в) үшбұрыштың бұрыштарын;

г) үшбұрыштың ауданын табу керек.

Шешуі:

а) үшбұрыштың қабырғаларының ұзындығын есептейміз:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (0 - 6)^2} = \sqrt{64 + 36} = 10;$$

$$AC = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (-4 - 6)^2} = \sqrt{25 + 100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5};$$

$$BC = \sqrt{(-1 + 4)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Енді үшбұрыш қабырғаларының теңдеулерін табамыз. Ол үшін екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуінің формулансын пайдаланамыз:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

1. AB түзуінің теңдеуін табамыз:

$$\frac{y - 6}{0 - 6} = \frac{x - 4}{-4 - 4}; \quad -8(y - 6) = -6(x - 4); \quad 4(y - 6) = 3(x - 4);$$

$$4y - 24 = 3x - 12; \quad 4y - 3x - 12 = 0 \quad \text{немесе} \quad y = \frac{3}{4}x + 3.$$

2. AC қабырғасының теңдеуін табамыз:

$$\frac{y - 6}{-4 - 6} = \frac{x - 4}{-1 - 4}; \quad -5(y - 6) = -10(x - 4); \quad y - 6 = 2(x - 4);$$

$$y - 2x + 2 = 0 \quad \text{немесе} \quad y = 2x - 2.$$

3. BC қабырғасының теңдеуі:

$$\frac{y - 0}{-4 - 0} = \frac{x + 4}{-1 + 4}; \quad 3(y - 0) = -4(x + 4); \quad 3y + 4x + 16 = 0 \quad \text{немесе}$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3};$$

ә) C нүктесінен AB қабырғасына жүргізілген CD перпендикулярларының теңдеуін жазу үшін түзулердің перпендикулярлық белгісін $k_{AB} \cdot k_{CD} = -1$ пайдаланамыз.

$$AB \text{ түзуінің теңдеуінен } k_{AB} = \frac{3}{4}; \text{ осыдан } k_{CD} = -\frac{4}{3}.$$

Енді C нүктесі арқылы $k_{CD} = -\frac{4}{3}$ бағытта жүргізілген $y - y_1 = k(x - x_1)$ теңдеуін пайдаланамыз:

$$y + 4 = -\frac{4}{3}(x + 1); \quad 3y + 12 = -4x - 4; \quad 3y + 4x + 16 = 0;$$

б) енді A нүктесінен BC қабырғасына жүргізілген медиананың теңдеуін жазамыз. Ол үшін алдымен E нүктесінің координатасын табамыз, ол үшін кесіндінің ортасын табу формуласын пайдаланып E нүктесінің координаталарын табамыз:

$$x_E = \frac{x_c + x_e}{2} = \frac{-4 + (-1)}{2} = -\frac{5}{2}; \quad y_E = \frac{y_c + y_e}{2} = \frac{-4 + (-0)}{2} = -2; \quad E = \left(-\frac{5}{2}; -2\right).$$

Енді AE медианасының теңдеуін екі нүкте арқылы өтетін түзудің формуласын пайдаланып жазамыз:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}; \quad \frac{y-6}{-2-6} = \frac{x-4}{\frac{-5}{2}-4}; \quad -6\frac{1}{2}(y-6) = -8(x-4);$$

$$-\frac{13}{2}(y-6) = -8(x-4); \quad 13(y-6) = 16(x-4), \quad 13y - 16x - 14 = 0.$$

в) A бұрышын табу үшін мына формуланы пайдаланамыз:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}; \quad k_{AC} = 2; \quad k_{AB} = \frac{3}{4};$$

осыдан

$$\operatorname{tg} A = \frac{2 - \frac{3}{4}}{1 + \frac{3}{4} \cdot 2} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}; \quad A = \operatorname{arctg} \frac{1}{2};$$

г) үшбұрыштың ауданын екі әдіспен табайық. Бірінші әдісте $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h$ формуласын қолданамыз, ол үшін алдымен C нүктесінен AB -ға дейінгі ара қашықтықты анықтаймыз. Ол үшін AB түзуінің теңдеуі:

$$4y - 3x - 12 = 0; \quad A = -3; \quad B = 4; \quad C = -12; \quad x_c = -1; \quad y_c = 4;$$

$$CD = \left| \frac{Ax_c + By_c + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \left| \frac{(-3) \cdot (-1) + 4 \cdot (-4) - 12}{5} \right| = \left| \frac{3 - 16 - 12}{5} \right| = 5;$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB}| \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = \frac{50}{2} = 25 (\text{кв. бірлік}).$$

Екінші әдісте $\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$ формуласын қолданамыз.

Олай болса

$$\pm S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} (-4) - 4 & 6 - 0 \\ (-1) - 4 & (-4) - 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -8 & 6 \\ -5 & -10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (80 - 30) = 25;$$

$$S = 25.$$

2. Төмендегі екінші ретті қисықтарды сызыңдар:

а) $(x-7)^2 + (y+8)^2 = 81;$

ә) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1;$

$$\text{б) } \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1;$$

$$\text{в) } y^2 = 10x.$$

Шешуі:

а) $(x-7)^2 + (y+8)^2 = 81$ центрі $C(7;-8)$ нүктесінде жататын, радиусы $R=9$ –ға тең шеңбердің теңдеуі (суретін салу керек).

ә) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ теңдеуі эллипстің теңдеуі болады. Оның жарты өстері $a=10, b=8$ -ге тең болады. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 64} = 6$, олай болса, эллипстың фокустары $F_1(6;0)$ және $F_2(-6;0)$ ал эксцентриситеті $\varepsilon = c/a = 0.6$ –ға тең болады (суретін салу керек).

б) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ теңдеуі гиперболаның теңдеуі болады. Оның нақты жарты өсі $a=12$ -ге, жорамал жарты өсі $b=5$ тең болады. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$, олай болса, эллипстың фокустары $F_1(13;0)$ және $F_2(-13;0)$, ал эксцентриситеті $\varepsilon = c/a = 12/13$ –ке тең болады (суретін салу керек).

в) $y^2 = 10x$ теңдеуі параболаның теңдеуі болады. Параболаның симметрия өсі Ox , ал фокусы $F(2.5;0)$, директрисасының теңдеуі $x = -2.5$ болады (суретін салу керек).

3. $A_1(4;3;-2)$, $A_2(1;3;0)$, $A_3(2;5;1)$, $A_4(1;2;-1)$ нүктелері берілген:

а) A_4 нүктесінің A_1, A_2, A_3 нүктелері арқылы өтетін жазықтықтан ара қашықтығын;

ә) A_1, A_2, A_3 және A_1, A_2, A_4 нүктелері арқылы өтетін жазықтықтардың арасындағы бұрышты;

б) A_1 және A_4 нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін;

в) A_1A_4 түзуі мен $A_1A_2A_3$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табу керек.

Шешуі:

а) A_1, A_2, A_3 - нүктелері арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуін жазу үшін:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

формуланы пайдаланамыз:

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-3 & z+2 \\ -3 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + (z+2)\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-4(x-4) + 5(y-3) - 6(z+2) = 0;$$

$$-4x + 5y - 6z - 11 = 0.$$

$-4x + 5y - 6z - 11 = 0$ - $A_1 A_2 A_3$ жазықтығының жалпы теңдеуі.

$A_4(x_0, y_0, z_0)$ нүктесінен жазықтыққа дейінгі ара қашықтықтың формуланы пайдалансақ, онда:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad d = \left| \frac{-4 \cdot 1 + 5 \cdot 2 - 6 \cdot (-1) - 11}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-6)^2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{77}};$$

ә) $A_1 A_2 A_3$ жазықтығының нормаль векторын $\vec{n}_1 \{-4; 5; -6\}$ жалпы теңдеуінен алуға болады. Енді $A_1 A_2 A_4$ жазықтығының нормаль векторын $\vec{n}_2$ былай да табуға болады:

$$\vec{n}_2 = [\overrightarrow{A_1 A_2} \times \overrightarrow{A_1 A_4}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}.$$

$$\vec{n}_2 = \{2; 3; 3\}.$$

Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш олардың $\vec{n}_1 \{-4; 5; -6\}$ және $\vec{n}_2 = \{2; 3; 3\}$ нормалдарының арасындағы бұрыш. Олай болса (3.11) формуласы бойынша:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{(-4) \cdot 2 + 5 \cdot 3 + (-6) \cdot 3}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2}} = \\ &= \frac{-11}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{22}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}; \quad \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right); \end{aligned}$$

б) A_1 және A_4 нүктелері арқылы өтетін түзудің теңдеуін жазу үшін

$$(3.10) \text{ формуласын қолданамыз: } \frac{x - x_1}{x_4 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_4 - z_1}$$

$$\frac{x - 4}{1 - 4} = \frac{y - 3}{2 - 3} = \frac{z + 2}{-1 + 2}; \quad \frac{x - 4}{-3} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 2}{1},$$

мұндағы $\vec{s} = \{-3, -1, 1\}$ түзудің бағыттаушы векторы;

в) $A_1 A_4$ түзуі мен $A_1 A_2 A_3$ жазықтығының арасындағы бұрыштың синусын табу үшін (3.12) формуласын қолданамыз. $A_1 A_4$ түзуінің $\vec{s} = \{-3, -1, 1\}$ бағыттаушы векторы мен $A_1 A_2 A_3$ жазықтығының $\vec{n}_1 \{-4, 5, -6\}$ нормаль векторларының арасындағы α бұрыштың синусы:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{s}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|(-4) \cdot (-3) + 5 \cdot (-1) + (-6) \cdot 1|}{\sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{77} \cdot \sqrt{11}} = \frac{1}{11\sqrt{7}}.$$

Бақылау сұрақтары.

1. Екі нүктенің арақашықтығы қандай формуламен анықталады?
2. Кесіндіні берілген қатынаста бөлетін нүктенің координаттары қалай табылады? Кесіндінің ортасының координаттары қалай анықталады?
3. Жазықтықтағы түзудің жалпы теңдеуі және дербес жағдайлары.
4. Екі түзу арасындағы бұрыш. Қай уақытта жазықтықтағы екі түзу параллель болады? Қай уақытта жазықтықтағы екі түзу перпендикуляр болады?
5. Нүктеден түзуге дейінгі қашықтық.
6. Шеңбер және оның канондық теңдеуі.
7. Эллипс және оның канондық теңдеуі.
8. Гипербола және оның канондық теңдеуі.
9. Парабола және оның канондық теңдеуі.
10. Жазықтықтың жалпы теңдеуі және дербес жағдайлары.
11. Берілген үш нүкте арқылы өтетін жазықтықтың теңдеуі.
12. Екі жазықтықтың арасындағы бұрыш. Қай уақытта екі жазықтық параллель болады? Қай уақытта екі жазықтық перпендикуляр болады?
13. Нүктеден жазықтыққа дейінгі қашықтық.
14. Кеңістіктегі түзудің жалпы теңдеуі.
15. Кеңістіктегі түзудің теңдеуінің канондық және параметрлік түрлері.
16. Екі түзудің арасындағы бұрыш. Қай уақытта екі түзу параллель болады? Қай уақытта екі түзу перпендикуляр болады?
17. Түзу мен жазықтықтың арасындағы бұрыш. Олардың параллельдік және перпендикулярлық шарттары.
18. Екінші ретті беттердің түрлері.

Әдебиеттер тізімі

Негізгі

- 1 Айдос Е.Ж. Жоғары математика. Том 1, 2, 3 - Алматы: «Бастау», 2008.
- 2 Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). - Алматы: «Иль-Тех-Кітап». ЖШС, 2003. - 744 б.
- 3 Е.Ә. Ақжігітов, М.Ш. Тілепиев Жоғары математикадан есептер мен жаттығулар. 1,2-бөлім. – Астана: Фолиант, 2017.
- 4 Сағынтаев С., Сағынтаева С. Жоғарғы математика: Оқулық. - Астана: ҚазЭҚСХУ БПО, 2015. - 545 б.
- 5 Хасеинов К.А. Математика канондары. – Алматы: Атамұра, 2004.
- 6 Астраханцева Л.Н., Байсалова М.Ж. Алгебра және геометрия. 5В0704 – Есептеу техникасы және бағдарламалық қамтамасыз ету, 5В0703 – Ақпараттар жүйесі мамандығы бойынша оқитын студенттер үшін. Дәрістер жинағы. - Алматы: АЭЖБИ, 2010. - 48 б.

Қосымша

- 7 Сборник индивидуальных задании по высшей математике. Под ред. Рябушко А. П. – Минск: Выш. школа, 2001.
- 8 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов. Том 1, 2. - М.: Дрофа, 2004.
- 9 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1,2. - М.: Высшая школа, 2003.

Мазмұны

Кіріспе	3
1 Сызықтық алгебра элементтері	4
1.1 Анықтауыштар	4
1.2 Матрица	15
1.3 Сызықты теңдеулер жүйесі.....	24
2 Векторлық алгебра элементтері	44
2.1 Негізгі ұғымдар.....	44
2.2 Векторларға сызықты амалдар қолдану.....	46
2.3 Векторлардың скалярлық көбейтіндісі.....	48
2.4 Векторлардың векторлық көбейтіндісі.....	49
2.5 Векторлардың аралас көбейтіндісі.....	52
2.6 Векторлардың сызықты тәуелділігі.....	54
3 Аналитикалық геометрия элементтері.....	60
3.1 Жазықтықтағы аналитикалық геометрия.....	60
3.2 Кеңістіктегі аналитикалық геометрия.....	74
Әдебиеттер тізімі.....	98

Байсалова Мәншүк Жұмамұрақызы
Тілепиев Мұрат Шәпенұлы

МАТЕМАТИКА
ТЕОРИЯСЫ ЖӘНЕ ЕСЕПТЕР ЖИНАҒЫ
1- бөлім

Оқулық

Редактор Ж.Н.Изтелеуова
Стандарттау бойынша маман Г.И.Мухаметсариева

Басуға _____ қол қойылды
Таралымы _____ дана
Көлемі 6,2 баспа табақ

Пішімі 60x84 1/16
Баспаханалық қағаз №1
Тапсырыс Бағасы 3100 тг.

«Алматы энергетика және байланыс университеті»
коммерциялық емес акционерлік қоғамының
көшірме-көбейткіш бюросы
050013, Алматы, Байтұрсынұлы көшесі, 126/1